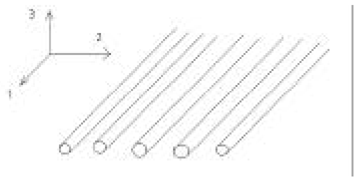
Vorlesung Kunststofftechnik

5 Werkstoffe mit orthotropen Eigenschaften



Zusammenhang zwischen E-Modul und Nachgiebigkeit (J):

in Faserrichtung

$$J_{11} = \frac{1}{E_{11}}$$

quer zur Faserrichtung

$$J_{22} = \frac{1}{E_{22}}$$

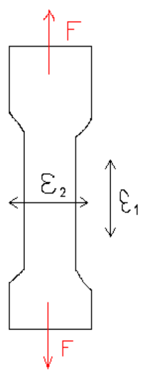
45° zur Faserrichtung

$$J_{12} = J_{21} = \frac{-n_{12}}{E_{11}} = \frac{n_{21}}{E_{22}} = \frac{Querkontraktionszahl}{E - Modul}$$

$$J_{66} = \frac{1}{G_{12}} = \frac{1}{Schub - Modul}$$

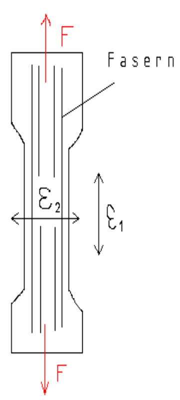
Bestimmung der Materialkonstante für **isotropes Material**:

⇒ E, G, ν

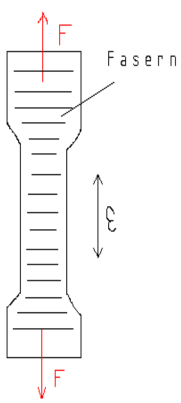


Bestimmung der Materialkonstanten für **orthotropes Material**:

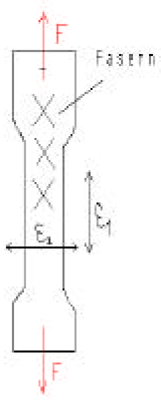
⇒ E_{11}, ν_{12}



⇒ E_{22}



⇒ G_{12}



Steifigkeit der unidirektionalen Einzelschicht

Nachgiebigkeitsmatrix für orthotropes Material. ($J_{12} = J_{21}$)

$$\begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & 0 \\ J_{21} & J_{22} & 0 \\ 0 & 0 & J_{66} \end{bmatrix}$$

Steifigkeitsmatrix für orthotropes Material. ($C_{12} = C_{21}$)

$$[C] = [J]^{-1} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}$$

Stoffgesetz für isotropes, elastisches Material: $\sigma = E \bullet \varepsilon$
Stoffgesetz für orthotropes, elastisches Material:

$$[s] = [C] \cdot [e]$$

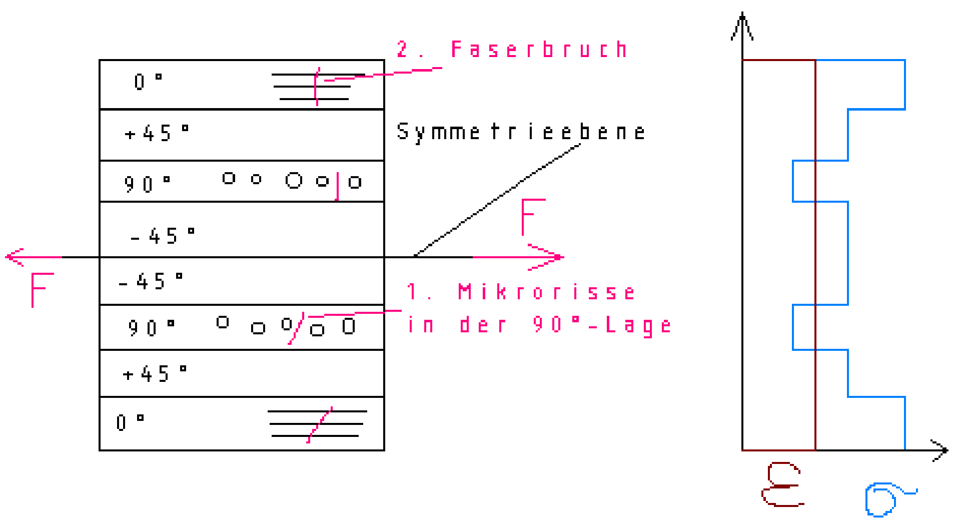
$$[e] = [J] \cdot [s]$$

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ t_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ n_{12} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ n_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & 0 \\ J_{21} & J_{22} & 0 \\ 0 & 0 & J_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ t_{12} \end{bmatrix}$$

$$[C] = [J]^{-1} = \begin{bmatrix} E_{11} & \frac{E_{22}}{n_{21}} & 0 \\ \frac{E_{22}}{n_{21}} & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix}$$

Beispiel mit acht Lagen:



Bruchdehnungen von CFK:

ε_1 in Faserrichtung = 1,6 % ε_2 quer zur Faserrichtung = 0,8 %

Bruchspannung (Festigkeit) von CFK:

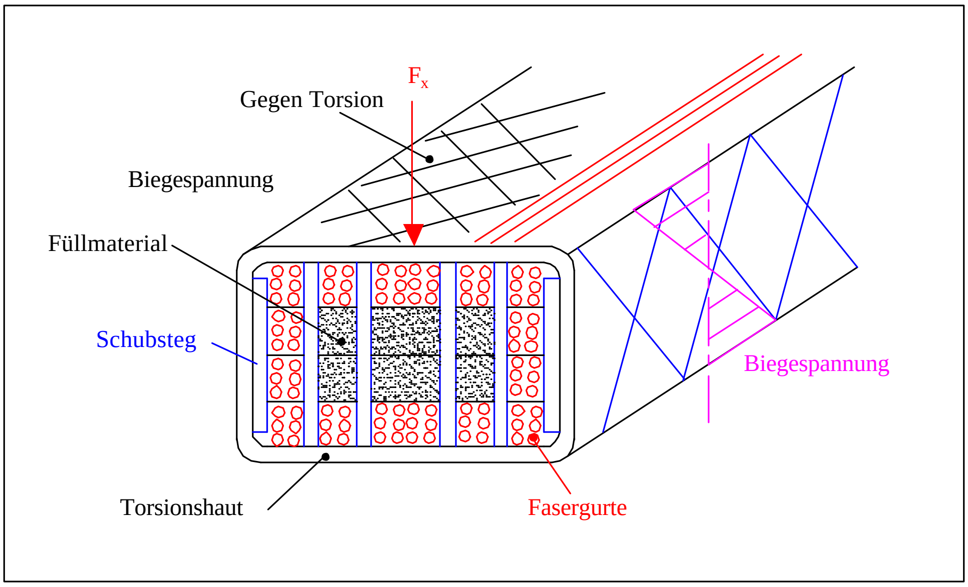
σ_1 in Faserrichtung = 1800 N/mm²

σ_2 quer zur Faserrichtung = 100 N/mm²

E-Moduli von CFK:

E_{11} = 288000 Mpa

E_{22} = 8000 MPa



Das Füllmaterial ist nur als Abstandhalter gedacht. Das Flächenträgheitsmoment wird zudem größer.

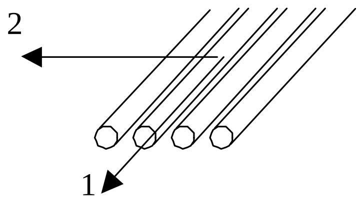
In x-Richtung ist der Träger sehr steif.
Quer dazu ist er weicher.

1.) Nachgiebigkeitsmatrix und Steifigkeitsmatrix der Orthotropen Einzelschicht

$$[J] = [S]^{-1}$$

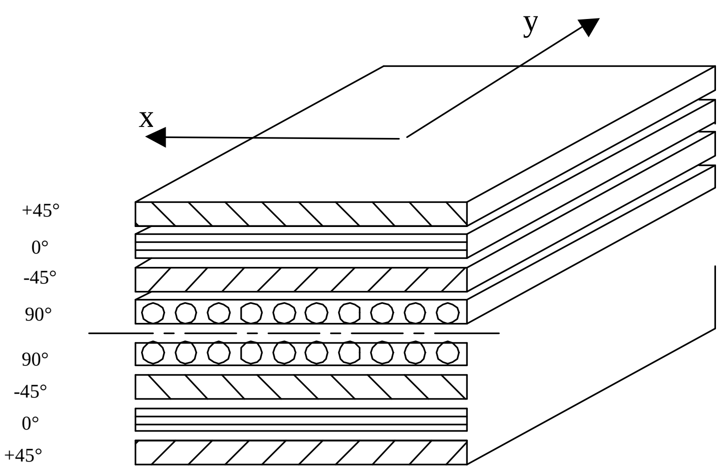
$$\begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & 0 \\ J_{12} & J_{22} & 0 \\ 0 & 0 & J_{66} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

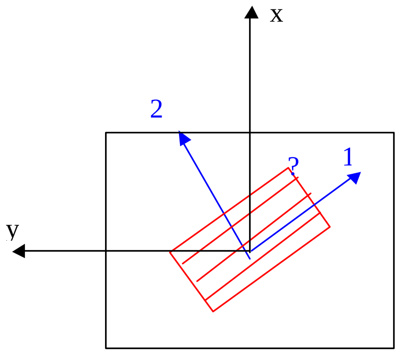
- <u>Einzelschicht:</u>



Beschreibung im Koordinatensystem 1,2:

- <u>Verbund</u>





? = 45° (Faserwinkel)
1,2: lokale Koordinaten
x,y: globale Koordinaten

2.) Transformation der Eigenschaften der Einzelschichten für den Faserwinkel der Einzelschicht

$$[T_1] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2-n^2 \end{bmatrix} \qquad [T_2] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & mn \\ n^2 & m^2 & -mn \\ -2mn & 2mn & m^2-n^2 \end{bmatrix}$$

mit: m=cos? n=sin?

$$\boxed{\left[\hat{S}\right] = [T_1]^{-1} * [S] * [T_2]}$$

Steifigkeitsmatrix der gedrehten Einzelschicht im Koordinatensystem x,y

3.) Berechnung der Steifigkeitsmatrix für den Gesamtverbund im globalen System aus der Summer der Einzelschichten

$$\boxed{\left[A\right]=\sum_{K=1}^{n}\left[\hat{S}\right]_K * h_K}$$

[A]	Steifigkeitsmatrix des Verbundes im globalen System x,y
n	Anzahl der Schichten
k	Laufindex (1...n)
h_k	Dicke der k-ten Einzelschicht

Werkstoffmatrix für die 0°-Lage

$$[T_1]_{0°}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} \qquad [T_2]_{0°}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\left[\hat{S}\right]=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}S_{11}&S_{12}&0\\S_{12}&S_{22}&0\\0&0&S_{66}\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}S_{11}&S_{12}&0\\S_{12}&S_{22}&0\\0&0&S_{66}\end{bmatrix}$$

Werkstoffmatrix für die 90°-Lage

$$[T_1]_{0°}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix} \qquad [T_2]_{0°}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

$$\left[\hat{S}\right]=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}S_{11}&S_{12}&0\\S_{12}&S_{22}&0\\0&0&S_{66}\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}S_{22}&S_{12}&0\\S_{12}&S_{11}&0\\0&0&S_{66}\end{bmatrix}$$

Werkstoffmatrix für die 45° und –45°-Lage

$$[T_1]_{0°}=\begin{bmatrix}0,5&0,5&1\\0,5&0,5&-1\\-0,5&0,5&0\end{bmatrix} \qquad [T_2]_{0°}=\begin{bmatrix}0,5&0,5&0,5\\0,5&0,5&-0,5\\-1&1&0\end{bmatrix}$$

$$\left[\hat{S}\right]=\begin{bmatrix}0,5&0,5&-1\\0,5&0,5&1\\0,5&-0,5&0\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}S_{11}&S_{12}&0\\S_{12}&S_{22}&0\\0&0&S_{66}\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}0,5&0,5&0,5\\0,5&0,5&-0,5\\-1&1&0\end{bmatrix}$$

$$\left[\hat{S}\right]=\begin{bmatrix}0,5(S_{11}+S_{12})&0,5(S_{11}+S_{12})&0,5(S_{11}-S_{12})\\0,5(S_{12}+S_{22})&0,5(S_{12}+S_{22})&0,5(S_{12}-S_{22})\\-S_{66}&S_{66}&0\end{bmatrix}$$