

## 13 Girsanov-Transformation, risikoneutrale Wahrscheinlichkeit

Wir folgen [1], 4.5., 5.2.2 und 5.2.3.

### 13.1 Verschiebung des Erwartungswerts einer Zufallsvariablen

Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum. Jede Zufallsvariable  $Z$  auf  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , die  $P$ -fast sicher positive Werte hat und für die  $\mathbf{E} Z = 1$  gilt, vermittelt eine Transformation des Wahrscheinlichkeitsraums  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  in einen Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, \check{P})$ . Das neue Wahrscheinlichkeitsmaß  $\check{P}$  ist dabei durch

$$\check{P}(A) = \mathbf{E} 1_A Z \quad \text{für } A \in \mathcal{F} \quad (1)$$

definiert.

Zufallsvariablen  $Y$  auf  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  sind auch Zufallsvariablen auf  $(\Omega, \mathcal{F}, \check{P})$ , haben aber dort einen möglicherweise anderen Erwartungswert  $\check{\mathbf{E}} Y$ , nämlich

$$\check{\mathbf{E}} Y = \mathbf{E} Y Z. \quad (2)$$

**Beispiel 2** Sei  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$  bezüglich  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  und  $Z = e^{-\theta X - \theta^2/2}$ . Sei  $Y = X + \theta$ . Es ist  $Y \sim \mathcal{N}(\theta, 1)$  auf  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  und  $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$  auf  $(\Omega, \mathcal{F}, \check{P})$ .

*Beweis*

1. Tatsächlich ist  $\mathbf{E} Z = 1$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} Z &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\theta x - \theta^2/2} e^{-x^2/2} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+\theta)^2/2} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx \\ &= 1. \end{aligned}$$

2. Wir berechnen die momenterzeugende Funktion  $\check{\varphi}(u)$  von  $Y$  auf  $(\Omega, \mathcal{F}, \check{P})$ :

$$\begin{aligned} \check{\varphi}(u) &= \check{\mathbf{E}} e^{uY} \\ &= \mathbf{E} e^{u(X+\theta)} e^{-\theta X - \theta^2/2} \\ &= e^{u\theta - \theta^2/2} \mathbf{E} e^{(u-\theta)X} \\ &= e^{u\theta - \theta^2/2} \varphi(u - \theta) \\ &= e^{u\theta - \theta^2/2} e^{(u-\theta)^2/2} \\ &= e^{u^2/2}. \end{aligned}$$

Wir erhalten also die momenterzeugende Funktion einer  $\mathcal{N}(0, 1)$ -Zufallsvariablen.

□

### 13.2 Verschiebung der Erwartungswerte eines Prozesses: Girsanov-Theorem

Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum mit Filtration  $(\mathcal{F}(t))_{0 \leq t \leq T}$  und  $Z$  eine beliebige Zufallsvariable mit  $P$ -fast sicher positiven Werten und  $\mathbf{E} Z = 1$ .

Betrachte

$$Z(t) = \mathbf{E}(Z \mid \mathcal{F}(t)).$$

$(Z(t))_{0 \leq t \leq T}$  ist ein Martingal, denn für  $0 \leq s \leq t \leq T$  gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(Z(t) \mid \mathcal{F}(s)) &= \mathbf{E}(\mathbf{E}(Z \mid \mathcal{F}(t)) \mid \mathcal{F}(s)) \\ &= \mathbf{E}(Z \mid \mathcal{F}(s)) \\ &= Z(s). \end{aligned}$$

Deshalb ist

$$\begin{aligned} \mathbf{E} Z(t) &= \mathbf{E} \mathbf{E}(Z \mid \mathcal{F}(t)) \\ &= \mathbf{E} Z \\ &= 1. \end{aligned}$$

**Bemerkung 17** Für eine  $\mathcal{F}(t)$ -messbare Zufallsvariable  $Y$  gilt

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}} Y &= \mathbf{E} Y Z \\ &= \mathbf{E} \mathbf{E}(Y Z \mid \mathcal{F}(t)) \\ &= \mathbf{E} Y \mathbf{E}(Z \mid \mathcal{F}(t)) \\ &= \mathbf{E} Y Z(t). \end{aligned}$$

**Bemerkung 18** Für eine  $\mathcal{F}(t)$ -messbare Zufallsvariable  $Y$  und  $0 \leq s \leq t \leq T$  gilt

$$\tilde{\mathbf{E}}(Y \mid \mathcal{F}(s)) = \frac{1}{Z(s)} \mathbf{E}(Y Z(t) \mid \mathcal{F}(s)). \quad (3)$$

*Beweis* Auf beiden Seiten von (3) stehen  $\mathcal{F}(s)$ -messbare Zufallsvariablen. Ist  $L$  die linke Seite und  $R$  die rechte, so ist zu zeigen, dass  $\tilde{\mathbf{E}} 1_A L = \tilde{\mathbf{E}} 1_A R$  für alle  $A \in \mathcal{F}(s)$  gilt.

Beginnen wir links:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}} 1_A \tilde{\mathbf{E}}(Y \mid \mathcal{F}(s)) &= \tilde{\mathbf{E}} 1_A Y \\ &= \mathbf{E} 1_A Y Z(t). \end{aligned}$$

Und nun rechts:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}} \left( 1_A \frac{1}{Z(s)} \mathbf{E}(Y Z(t) \mid \mathcal{F}(s)) \right) &= \mathbf{E} (1_A \mathbf{E}(Y Z(t) \mid \mathcal{F}(s))) \\ &= \mathbf{E} (\mathbf{E}(1_A Y Z(t) \mid \mathcal{F}(s))) \\ &= \mathbf{E} 1_A Y Z(t). \end{aligned}$$

□

**Satz 26 (Girsanov-Theorem)** Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  mit Filtration  $(\mathcal{F}(t))_{0 \leq t \leq T}$  und Brownscher Bewegung  $(B(t))_{0 \leq t \leq T}$ , sowie ein an die Filtration adaptierter Prozess  $(\Theta(t))_{0 \leq t \leq T}$ .

Für  $0 \leq t \leq T$  sei

$$\check{B}(t) = B(t) + \int_0^t \Theta(u) du.$$

Sei  $Z(t) = e^{-\int_0^t \Theta(u) dB(u) - \frac{1}{2} \int_0^t \Theta(u)^2 du}$  mit  $\mathbf{E} \int_0^T \Theta(u)^2 Z(u)^2 du < \infty$ .

Sei  $Z = Z(T)$  und  $\check{P}$  das mittels  $Z$  transformierte  $P$ .

Dann ist  $(\check{B}(t))_{0 \leq t \leq T}$  eine Brownsche Bewegung auf  $(\Omega, \mathcal{F}, \check{P})$ .

*Beweis* Nach Lévy ist ein Martingal mit stetigen Pfaden, Anfangswert 0 und quadratischer Variation  $t$  zur Zeit  $t$  eine Brownsche Bewegung. Wir weisen diese Eigenschaften nach.

1. Anfangswert:  $\check{B}(0) = B(0) = 0$ .
2. Quadratische Variation:  $d\check{B}(t)^2 = (dB(t) + \Theta(t) dt)^2 = dt$ .
3.  $(Z(t))_{0 \leq t \leq T}$  ist ein  $P$ -Martingal:

$$\begin{aligned} Z(t) &= e^{X(t)} \text{ mit } X(t) = - \int_0^t \Theta(u) dB(u) - \frac{1}{2} \int_0^t \Theta(u)^2 du, \\ dZ(t) &= Z(t) dX(t) + \frac{1}{2} Z(t) (dX(t))^2 \\ &= Z(t) (-\Theta(t) dB(t) - \frac{1}{2} \Theta(t)^2 dt) + \frac{1}{2} Z(t) \Theta(t)^2 dt \\ &= -\Theta(t) Z(t) dB(t). \end{aligned}$$

Mit  $Z = Z(T)$  ist also  $Z(t) = \mathbf{E}(Z | \mathcal{F}(t))$  für alle  $t$ .

4.  $(\check{B}(t)Z(t))_{0 \leq t \leq T}$  ist ein  $P$ -Martingal:

$$\begin{aligned} d(\check{B}(t)Z(t)) &= \check{B}(t) dZ(t) + Z(t) d\check{B}(t) + d\check{B}(t)dZ(t) \\ &= -\check{B}(t)\Theta(t)Z(t) dB(t) + Z(t) dB(t) + Z(t)\Theta(t) dt - \Theta(t)Z(t) dt \\ &= (-\check{B}(t)\Theta(t) + 1)Z(t) dB(t). \end{aligned}$$

5.  $(\check{B}(t))_{0 \leq t \leq T}$  ist ein  $\check{P}$ -Martingal:

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{E}}(\check{B}(t) | \mathcal{F}(s)) &= \frac{1}{Z(s)} \mathbf{E}(\check{B}(t)Z(t) | \mathcal{F}(s)) \\ &= \frac{1}{Z(s)} \check{B}(s)Z(s) \\ &= \check{B}(s). \end{aligned}$$

□

### 13.3 Aktienpreis unter risikoneutraler Wahrscheinlichkeit

Die stochastische Differentialgleichung

$$dS(t) = \alpha(t)S(t) dt + \sigma(t)S(t) dB(t) \quad (4)$$

beschreibt einen Aktienpreisprozess. Sie hat die Lösung

$$S(t) = S(0)e^{\int_0^t \sigma(s) dB(s) + \int_0^t (\alpha(s) - \frac{1}{2}\sigma(s)^2) ds}. \quad (5)$$

$(S(t))_{0 \leq t \leq T}$  ist i.a. kein Martingal.

Sei  $(R(t))_{0 \leq t \leq T}$  ein adaptierter Zinsratenprozess und  $D(t) = e^{-\int_0^t R(s) ds}$  der zugehörige Diskontprozess. Es ist

$$dD(t) = -R(t)D(t) dt.$$

Der diskontierte Aktienpreisprozess ist erklärt als

$$D(t)S(t) = S(0)e^{\int_0^t \sigma(s) dB(s) + \int_0^t (\alpha(s) - R(s) - \frac{1}{2}\sigma(s)^2) ds}.$$

Er genügt der stochastischen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} d(D(t)S(t)) &= (\alpha(t) - R(t))D(t)S(t) dt + \sigma(t)D(t)S(t) dB(t) \\ &= \sigma(t)D(t)S(t) \left( \frac{\alpha(t) - R(t)}{\sigma(t)} dt + dB(t) \right). \end{aligned}$$

Die Größe

$$\Theta(t) = \frac{\alpha(t) - R(t)}{\sigma(t)}$$

ist der Risiko-Marktpreis (*market price of risk*).

Geht man nun bezüglich des Prozesses  $(\Theta(t))_{0 \leq t \leq T}$  wie vorhin über zu  $\tilde{P}$  und  $(\tilde{B}(t))_{0 \leq t \leq T}$ , dann gilt

$$d(D(t)S(t)) = \sigma(t)D(t)S(t) d\tilde{B}(t).$$

$\tilde{P}$  ist das risikoneutrale Wahrscheinlichkeitsmaß und  $(D(t)S(t))_{0 \leq t \leq T}$  ein  $\tilde{P}$ -Martingal.

Es ist  $dB(t) = d\tilde{B}(t) - \Theta(t) dt$ , deshalb wird (4) zu

$$dS(t) = R(t)S(t) dt + \sigma(t)S(t) dB(t) \quad (6)$$

und (5) zu

$$S(t) = S(0)e^{\int_0^t \sigma(s) d\tilde{B}(s) + \int_0^t (R(s) - \frac{1}{2}\sigma(s)^2) ds}. \quad (7)$$

[1]: If  $\alpha(t) > R(t)$ , then the change of measure puts more probability on the paths with lower return so that the overall mean rate of return is reduced from  $\alpha(t)$  to  $R(t)$ .

## Literatur

[1] S. E. Shreve. *Stochastic Calculus for Finance II*. Springer, 2004.