

Stochastic Processes in Risk and Finance, Prüfung, mit Lösungen

M. Gruber

14. Juli 2010, 10:30–12:00, R0.012 (13)

1. (16 Punkte) *Zeitdiskretes Martingal*

Sei (Ω, \mathcal{F}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(\mathcal{F}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Filtration, $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ein Martingal bezüglich $(\mathcal{F}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und

$$X_k = 1 + \sum_{0 \leq i < k} i \cdot (S_{i+1} - S_i).$$

Zeigen Sie, dass $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ein Martingal ist.

Lösung

- $\mathbf{E}(X_{k+1} | \mathcal{F}_k) = \mathbf{E}(k \cdot (S_{k+1} - S_k) + X_k | \mathcal{F}_k) = k \cdot \mathbf{E}(S_{k+1} - S_k | \mathcal{F}_k) + \mathbf{E}(X_k | \mathcal{F}_k)$ (Linearität der bedingten Erwartung).
- $\mathbf{E}(S_{k+1} - S_k | \mathcal{F}_k) = \mathbf{E}(S_{k+1} | \mathcal{F}_k) - \mathbf{E}(S_k | \mathcal{F}_k) = S_k - S_k = 0$ (Linearität der bedingten Erwartung und Martingaleigenschaft).
- $\mathbf{E}(X_k | \mathcal{F}_k) = X_k$ (denn X_k ist \mathcal{F}_k -messbar).
- Somit ist gezeigt: $\mathbf{E}(X_{k+1} | \mathcal{F}_k) = X_k$.
- $\mathbf{E}(X_{k+l} | \mathcal{F}_k) = X_k$ folgt durch iteriertes Bedingen (*iterated conditioning*).

2. (16 Punkte) *Stochastisches Kalkül*

Sei (Ω, \mathcal{F}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(\mathcal{F}(t))_{t \geq 0}$ eine Filtration, $(B(t))_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung bezüglich $(\mathcal{F}(t))_{t \geq 0}$.

Sei $x > 0$ und

$$X(t) = (x^{1/3} + \frac{1}{3}B(t))^3.$$

Der Prozess $(X(t))_{t \geq 0}$ erfüllt die stochastische Differentialgleichung

$$dX(t) = aX(t)^b dt + cX(t)^d dB(t)$$

mit geeigneten Koeffizienten a, b, c, d .

Wie lauten diese Koeffizienten?

Lösung

- $X(t) = f(t, B(t))$ mit $f(t, s) = (x^{1/3} + (1/3)s)^3$.
- $f_t(t, s) = 0$, $f_s(t, s) = (x^{1/3} + (1/3)s)^2$, $f_{ss}(t, s) = (2/3)(x^{1/3} + (1/3)s)$.
- $dX(t) = f_t(t, B(t)) dt + f_s(t, B(t)) dB(t) + (1/2)f_{ss}(t, B(t)) dt$.

- $f_t(t, B(t)) = 0, f_s(t, B(t)) = X(t)^{2/3}, (1/2)f_{ss}(t, B(t)) = (1/3)X(t)^{1/3}.$
- $dX(t) = (1/3)X(t)^{1/3} dt + X(t)^{2/3} dB(t).$
- $a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{3}, c = 1, d = \frac{2}{3}.$

3. (16 Punkte) *Lineare stochastische Differentialgleichung*

Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$dX(t) = -\frac{1}{t}X(t) dt + t dB(t), \quad X(0) = 0. \quad (1)$$

- a) Lösen Sie (1).
 b) Berechnen Sie $\mathbf{E} X(t).$

Tipp Das ist (notfalls) auch möglich, ohne (1) zu lösen.

- c) Berechnen Sie $\mathbf{Var} X(t).$

Tipp Das ist (notfalls) auch möglich, ohne (1) zu lösen.

Lösung

- a) • Die Differentialgleichung ist linear im engeren Sinn ($\sigma = 0$) mit variablem $\alpha.$
 • Es ist $\alpha(t) = -(1/t), \beta(t) = 0, \rho(t) = t$ und $X_0 = 0.$
 • Nach 11.1.2., Formel (4), der Vorlesung gilt mit den vorliegenden Werten für $\alpha, \beta, \rho, X_0:$

$$X(t) = \int_0^t e^{\int_s^t (-1/u) du} s dB(s) = \int_0^t e^{-\ln(t/s)} s dB(s) = \frac{1}{t} \int_0^t s^2 dB(s).$$

- b) $\mathbf{E} X(t) = \mathbf{E} \frac{1}{t} \int_0^t s^2 dB(s) = 0$

Bemerkung Aus (1) folgt unmittelbar $\mathbf{E} X(t) = -\int_0^t (1/s) \mathbf{E} X(s) ds.$ Man kann für $f(t) = \mathbf{E} X(t)$ auch direkt das Anfangswertproblem $\dot{f}(t) = -(1/t)f(t), f(0) = 0$ lösen.

- c) $\mathbf{Var} X(t) = \frac{1}{t^2} \int_0^t s^4 ds = \frac{1}{5} t^3.$

Bemerkung Aus (1) folgt mit Itô-Kalkül $\mathbf{E} X(t)^2 = -\int_0^t ((2/s) \mathbf{E} X(s)^2 + s^2) ds.$ Man kann für $g(t) = \mathbf{E} X(t)^2$ auch direkt das Anfangswertproblem $\dot{g}(t) = -(2/t)g(t) + t^2, g(0) = 0$ lösen.

4. (16 Punkte) *Black-Scholes*

Seien $A_1(t) = e^{r_1 t}$ ein €-Bond und $A_2(t) = e^{r_2 t}$ ein US-\$-Bond. Das Wechselkursrisiko aus Sicht eines europäischen Investors sei in Form einer geometrischen Brownschen Bewegung modelliert: $E(t) = E(0)e^{\mu t + \sigma B(t)}$. Ein europäischer Investor kann entweder in den risikofreien €-Bond $A_1(t)$ oder in den risikobehafteten US-\$-Bond $S(t) = E(t)A_2(t)$ investieren.

Betrachten Sie eine Option, die einem europäischen Investor das Recht gibt, einen US-\$ für $p \in \mathbb{R}$ zu einem bestimmten Zeitpunkt $T > 0$ zu kaufen. Sei

$$C(t) = \varphi(t)S(t) + \psi(t)A_1(t)$$

der selbstfinanzierende Portfolioprozess, der den fairen Preis dieser Option im Sinne von *Black-Scholes* darstellt.

Drücken Sie die Eigenschaft "selbstfinanzierend" in einer Formel

$$dC(t) = \dots dt + \dots dB(t)$$

aus.

Lösung

- $S(t) = E(t)A_2(t) = E(0)e^{(r_2+\mu)t+\sigma B(t)}$,
- $dS(t) = (r_2 + \mu + \sigma^2/2)S(t) dt + \sigma S(t) dB(t)$,
- $dA_1(t) = r_1 A_1(t) dt$,
- $dC(t) = \varphi(t) dS(t) + \psi(t) dA_1(t) = (\varphi(t)(r_2 + \mu + \sigma^2/2)S(t) + \psi(t)r_1 A_1(t)) dt + \varphi(t)\sigma S(t) dB(t)$.

5. (16 Punkte) *Doob-Kolmogorov*

Sei

$$R(t) = R(0) + \sigma e^{-t} \int_0^t e^s dB(s)$$

mit $\sigma > 0$.

- Welche stochastische Differentialgleichung gilt für R ?
- Hat der Prozess $(R(t))_{t \geq 0}$ die *mean-reversion*-Eigenschaft?
- Berechnen Sie $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{Var} R(t)$.
- Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit

$$P\left(\max_{0 \leq t \leq T} (R(t) - R(0)) \geq 2\sigma\right)$$

mit Hilfe der Doob-Kolmogorov-Ungleichung nach oben ab.

Lösung

- $dR(t) = d(X(t)Y(t))$ mit $X(t) = \sigma e^{-t}$ und $Y(t) = \int_0^t e^s dB(s)$.
 - $dX(t) = -\sigma e^{-t} dt$, $dY(t) = e^t dB(t)$.
 - $d(X(t)Y(t)) = X(t) dY(t) + Y(t) dX(t)$ (Itô-Korrektur entfällt).
 - $X(t) dY(t) = \sigma dB(t)$, $Y(t) dX(t) = -\sigma e^{-t} \int_0^t e^s dB(s) = -R(t) dt$.
 - $dR(t) = -R(t) dt + \sigma dB(t)$.
- Ja: $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E} R(t) = R(0)$. ($(R(t))_{t \geq 0}$ ist ein Martingal).
- (Mit Itô-Isometrie:) $\mathbf{Var} R(t) = \sigma^2 e^{-2t} \int_0^t e^{2s} ds = \frac{\sigma^2}{2}(1 - e^{-2t}) \rightarrow \frac{\sigma^2}{2}$.
- $P(\max_{0 \leq t \leq T} (R(t) - R(0)) \geq 2\sigma) \leq \frac{1}{4\sigma^2} \mathbf{E}(R(T) - R(0))^2 = \frac{1}{4\sigma^2} \mathbf{Var} R(T) = \frac{1}{8}(1 - e^{-2T})$.

6. (16 Punkte) *Girsanov*

Sei (Ω, \mathcal{F}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(\mathcal{F}(t))_{t \geq 0}$ eine Filtration und $(B(t))_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung bezüglich $(\mathcal{F}(t))_{t \geq 0}$.

Der Prozess $S = (S(t))_{t \in [0, T]}$ sei definiert durch

$$S(t) = S(0)e^{(\alpha - \sigma^2/2)t + \sigma B(t)}$$

mit $\alpha > 0$, $\sigma > 0$ und $S(0) > 0$.

- Welche stochastische Differentialgleichung gilt für S ?
- Warum ist S kein P -Martingal?
- Angenommen, die Zinsrate $r > 0$ ist konstant und stimmt mit α überein: $\alpha = r$.
Was bedeutet dies für den Risiko-Marktpreis $\Theta(t)$?
- Sei $\alpha = r$ wie in 6c.
Mit welcher Funktion $D(t)$ ist der Prozess $D(t)S(t)$ ein Martingal?

Lösung

a) $dS(t) = \alpha S(t) dt + \sigma S(t) dB(t)$.

b) $\mathbf{E}S(t)$ ist nicht konstant: $\mathbf{E}S(t) = \mathbf{E}S(0) + \alpha \int_0^t \mathbf{E}S(u) du \Rightarrow \mathbf{E}S(t) = \mathbf{E}S(0)e^{\alpha t}$.

c) $\Theta(t) = \frac{\alpha - r}{\sigma} = 0$.

d) $D(t) = e^{-rt}$.