Markovprozesse und Warteschlangensysteme, Prüfung, mit Lösungen

M. Gruber

27. Januar 2010, 10:30–12:00, R0.013 (13)

1. V bezeichne die Lebensdauer eines Exemplares einer Systemkomponente. Spätestens nach Ablauf der Zeit V muss also das Exemplar durch ein neues ersetzt werden.

   Die Verteilungsfunktion von V sei

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0 \\ (t/\alpha)^2 & \text{für } 0 < t < \alpha \\ 1 & \text{für } t \geq \alpha \end{cases}$$

   Die Kosten für die Ersetzung einer Komponente im Fehlerfall seien doppelt so hoch wie die Ersetzung einer funktionierenden Komponente.

   Es soll untersucht werden, ob es kostengünstiger ist, ein Exemplar auf alle Fälle nach einer bestimmten Zeitspanne T gegen ein neues Exemplar auszuwechseln, auch wenn es noch funktioniert. Dazu wird die *Kostenrate* (s. Vorlesung 3) untersucht.

   (a) Wie lautet der Ausdruck für die Kostenrate $k(T)$ im vorliegenden Fall?

$$k(T) = \boxed{c_r \frac{F(T)+1}{\int_0^T 1 - F(t)\,dt} = c_r \frac{(\frac{T}{\alpha})^2 + 1}{T(1 - \frac{1}{3}\cdot(\frac{T}{\alpha})^2)}} \qquad \textit{5 P.}$$

   (b) Wo hat die Kostenrate $k(T)$ ihr Minimum?

   Lösung $k(T) = c_r \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot h(\frac{T}{\alpha})$ mit $h(t) = \dfrac{t^2+1}{t - \frac{1}{3}\cdot t^3}$ für $0 < t < 1$.

   $h'(t) = 0$ für $t^2 = 2\sqrt{3} - 3$ (Minimumstelle).

   Ist t von der Form $\frac{T}{\alpha}$, dann ist $T = \alpha\sqrt{2\sqrt{3}-3}$ an der Minimumstelle.

   $k(T)$ hat ihr Minimum bei $T = \boxed{\alpha\sqrt{2\sqrt{3}-3}}$ *5 P.*

2. Das *inspection paradoxon* besagt, dass die von Beobachtern durchschnittlich wahrgenommene Verteilung F_s des *spread* X eines Erneuerungprozesses verzerrt ist.

   Die wahre Verteilung F des *spread* sei hier die Gleichverteilung auf dem Intervall $[0, \alpha]$.

   Sei $f = F'$ die Dichte hierzu.

(a) Wie lautet die Dichte $f_s = F_s'$?

$f_s(t) = \boxed{\frac{2}{\alpha} t f(t) = \frac{2}{\alpha^2} t [0 < t < \alpha]}$ 5 P.

(b) Welchen (verzerrten) Erwartungsswert für den *spread* nimmt der Beobachter wahr?

Antwort: $\boxed{\frac{2}{3}\alpha}$ 5 P.

3. Gegeben ist die Markov-Matrix $M = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}$ zum Zustandsraum $I = \{1, 2, 3, 4\}$.

Sei $A = [3]$ die Kommunikationsklasse des Zustands 3.

Wir benutzen die aus der Vorlesung gewohnten Bezeichnungen: $H^A = \inf\{n \geq 0 \mid X_n \in A\}$ für die Treffzeit (*hitting time*) von A, $h_i^A = P(H^A < \infty \mid X_0 = i)$ für die Wahrscheinlichkeit, bei Start im Zustand i die Zustandsmenge A in endlicher Zeit zu treffen und $k_i^A = \mathbf{E}(H^A \mid X_0 = i)$ für den (bedingten) Erwartungswert der Pfadlänge vom Start in i bis zum Treffen der Zustandsmenge A..

(a) Aus welchen Zuständen besteht A?

Lösung $[1] = \{1\}$, $[2] = \{2\}$, $A = [3] = \{3, 4\}$.

$A = \boxed{\{3, 4\}}$ 5 P.

(b) Ist die Kommunikationsklasse A transitiv, null, oder positiv?

Lösung A ist endlich und abgeschlossen, daher positiv.

A ist $\boxed{\text{positiv}}$ 5 P.

(c) Berechnen Sie h_1^A.

Lösung $h_1^A = \frac{3}{4} h_1^A + \frac{1}{4} h_2^A$, also ist $h_1^A = h_2^A$. $h_2^A = 1$.

$h_1^A = \boxed{1}$ 5 P.

(d) Berechnen Sie k_1^A.

Lösung Es ist $\begin{bmatrix} k_1^A \\ k_2^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1^A \\ k_2^A \end{bmatrix}$.

Es folgt $\begin{bmatrix} 1/4 & -1/4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1^A \\ k_2^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ und damit $k_2^A = 1$, $k_1^A = 5$.

$k_1^A = \boxed{5}$ 5 P.

(e) Welchen stationären Zustand π hat M? (Ein stationärer Zustand ist ein Wahrscheinlichkeitsvektor π mit $\pi M = \pi$.)

Lösung $(M^T - I)\pi^T = 0$, d.h. $\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \pi^T = 0.$

Ein Lösungskandidat für π ist der Vektor $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$.

Multiplikation mit 2/2 macht daraus den Wahrscheinlichkeitsvektor $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$.

$\pi =$ $\boxed{\begin{bmatrix} 0 \; 0 \; 1/3 \; 2/3 \end{bmatrix}}$ *5 P.*

4. Gegeben ist ein M/M/1-System mit Warteschlangenbegrenzung. Es können maximal zwei Kunden im System sein (einer in der Warteschlange, einer im Service). Überzählige Kunden gehen verloren.

Die Ankunftsrate sei $\lambda = 1/4$, die Servicerate sei $\mu = 1$. Wir nehmen an, das System ist im Gleichgewicht.

Sei $p_n = \lim_{t\to\infty} P(N(t)) = n)$ die Wahrscheinlichkeit, dass sich n Kunden im System befinden ($n = 0, 1, 2$).

(a) Welche Werte ergeben sich für p_0, p_1, p_2?

Lösung $\rho = \lambda/\mu = 1/4$. $p_1 = \rho p_0$ und $p_2 = \rho^2 p_0$.

Wegen $p_0 + p_1 + p_2 = 1$ ergibt sich für p_0 der Wert 16/21.

$p_0, p_1, p_2 =$ $\boxed{\frac{16}{21}, \frac{4}{21}, \frac{1}{21}}$ *5 P.*

(b) Wieviele Kunden sind durchschnittlich im System?

Lösung $L = 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 = 2/7 \approx 0.3$

Antwort (# Kunden im System): $\boxed{2/7, \approx 0.3}$ *5 P.*

(c) Wie groß ist die durchschnittliche Systemverweilzeit der tatsächlich bedienten Kunden?

Lösung Die Servicerate der bedienten Kunden ist $\lambda(1 - p_2) = \frac{1}{4}(1 - \frac{1}{21}) = \frac{5}{21}$.

Die mittlere Verweilzeit ist $w_s = L/\lambda_s = 6/5$.

Antwort (Systemverweilzeit): $\boxed{6/5, \approx 1.2}$ *5 P.*

(d) Wenn ein Kunde verloren geht, entsteht ein Schaden von durchschnittlich 50 €.

Mit welchem durchschnittlichen Schaden pro Zeiteinheit ist zu rechnen?

Lösung $\lambda \cdot p_2 \cdot 50 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{21} \cdot 50$.

Antwort (Schaden/Zeiteinheit): $\boxed{25/42, \approx 0.6}$ *5 P.*

5. Ein Skilift befördert durchschnittlich alle zehn Sekunden sechs Personen nach oben.

   (a) Die Planer hatten geschätzt, dass durchschnittlich 24 Personen pro Minute an der Talstation eintreffen und nach oben fahren wollen.

   Wieviele Personen wären dann durchschnittlich am Lift angestanden?

   Lösung $\lambda = 24$ und $\mu = 36$ ergibt $\rho = 2/3$ und $Q = \rho^2/(1-\rho) = 4/3$.

   Antwort (# Personen): $\boxed{\approx 1.3}$ *5 P.*

   (b) In Wirklichkeit stehen durchschnittlich 50 Personen an. Die Ankunftsrate ist also größer.

   Welche Ankunftsrate ist realistisch?

   Lösung $Q = 50 = \rho^2/(1-\rho)$ ergibt $\rho = 5(-5+3\sqrt{3}) \approx 0.98$.

   λ hat also den Wert $36 \cdot 0.98 \approx 35.3$.

   Antwort (# Personen pro Minute): $\boxed{\approx 35.3}$ *5 P.*

   (c) Die Planer schlagen nun vor, die 6er-Gondeln durch 8er-Gondeln zu ersetzen. Der neue Lift wird dann alle zehn Sekunden acht Personen nach oben befördern.

   Auf wieviel Personen wird sich die Warteschlange verkürzen? (Natürlich ist von der realistischen Ankunftsrate aus (5b) auszugehen.)

   Lösung Nun ist $\rho = 35.3/48 \approx 0.74$.

   Mit diesem ρ ist $Q = \rho^2(1-\rho) \approx 2$. (Gute Aussichten für die Skifahrer.)

   Antwort (# Personen): $\boxed{\approx 2.0}$ *5 P.*