Markovprozesse und Warteschlangensysteme, Prüfung, mit Lösungen

M. Gruber

2. Februar 2009, 15:30–17:00, R1.006 (4)

Name:
Vorname:
Matrikelnummer:

5 Aufgaben. Es können 90 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen sind 30 Punkte erforderlich.

1. An einem Bahnsteig der S-Bahn verkehren die Züge mit exponentialverteilten Abständen, durchschnittlich vier pro Stunde. Fahrplan gibt es keinen.

   Fahrgäste kommen zum Bahnsteig in Form eines Poissonprozesses, durchschnittlich 100 Fahrgäste pro Stunde.

   Fahrgäste, die länger als eine halbe Stunde auf einen Zug warten müssen, erhalten eine Rückvergütung von 10 €.

   Wenn die Fahrgäste zum Bahnsteig kommen, sehen sie auf einer Anzeigentafel, wie lange der letzte Zug schon weg ist. Wenn der nächste Zug kommt, wissen sie also, wie lange die aktuelle Zeitspanne zwischen den Zügen war.

   (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fahrgast eine Zeitspanne zwischen zwei Zügen beobachtet, die größer als eine halbe Stunde ist?

   Lösung Die Verteilungsfunktion der Zeitspanne im langfristigen Mittel sei $F_s(x)$. Gefragt ist nach dem Wert $1 - F_s(\frac{1}{2})$.

   $F_s(\frac{1}{2}) = 4 \cdot (\frac{1}{2}(1 - e^{-4\cdot(1/2)}) - \int_0^{1/2} e^{-4u}\, du) = 1 - 3e^{-2}$.

   $1 - F_s(\frac{1}{2}) = 3e^{-2} \approx 0.406$.

   Antwort[1]: $3e^{-2}$ *6 P.*

   (b) Der Erwartungswert der kumulierten Rückvergütungen im Zeitraum $[0, t]$ sei $c(t)$. Berechnen Sie $\lim_{t\to\infty} c(t)/t$.

   Lösung Sei R_j die Rückvergütung und Y_j der Exzess.

[1] in Prozent oder als Zahl $\in [0, 1]$ oder als berechenbarer Ausdruck

Es ist $R_j = 10 \cdot [Y_j > \frac{1}{2}]$,
$\mathbf{E}R_j = 10 \cdot e^{-4\cdot(1/2)} = 10e^{-2}$,
$\mathbf{E}Y_j = \frac{1}{4}$,
$\lim_{t\to\infty} c(t)/t = \mathbf{E}R_j/\mathbf{E}Y_j = 40e^{-2} \approx 5.41$.

$\lim_{t\to\infty} c(t)/t =$ $\boxed{40e^{-2}}$ *6 P.*

(c) Wie groß ist der Anteil der Fahrgäste, deren Wartezeit 15 min nicht übersteigt?

Lösung $\mathbf{E}K_j(\frac{1}{4}) = 4\int_0^{1/4} e^{-4x}\,dx = 1 - e^{-1} \approx 0.632$.

Antwort[1]: $\boxed{1 - e^{-1}}$ *6 P.*

2. Kunden haben beim Kauf eines Verbrauchsartikels die Wahl zwischen den Marken A, B, C.

Diejenigen, die beim letzten Mal die Marke A gewählt haben, wählen beim nächsten Mal mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ wieder Marke A, mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ Marke B und mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ Marke C.

Diejenigen, die beim letzten Mal die Marke B gewählt haben, wählen beim nächsten Mal mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ Marke A und mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ wieder Marke B.

Diejenigen, die beim letzten Mal die Marke C gewählt haben, wählen beim nächsten Mal mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ Marke B und mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ wieder Marke C.

(a) Wie lautet die Übergangsmtrix P?

Lösung Die Übergangsmatrix ist $P = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$.

$P =$ $\boxed{\begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}}$ *6 P.*

(b) Wie groß ist der Marktanteil der Marke C?

Lösung Die Übergangsmatrix ist $P = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$.

Die Martkanteile sind die Komponenten eines Wahrscheinlichkeitsvektors π, der Eigenvektor zum Eigenwert 1 von P^T ist.

Es ist $\pi = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 1/4 \end{bmatrix}$.

Antwort[1]: $\boxed{1/4}$ *6 P.*

(c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit müssten Kunden, die beim letzten Mal die Marke C gewählt haben, wieder die Marke C wählen, damit deren Marktanteil 1/3 wäre? (Natürlich geht die größere Kundentreue zu C zu Lasten des Wechsels von C nach B).

Lösung Sei die Übergangsmatrix nun $P(c) = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1-c & c \end{bmatrix}$.

Der Wahrscheinlichkeitsvektor ist nun $\pi(c) = \begin{bmatrix} 1-c \\ 2(1-c) \\ 1/3 \end{bmatrix}$.

Daraus folgt $c = 7/9$.

Anwort[1]: $\boxed{7/9}$ *6 P.*

3. Gegeben ist der Zustandsraum $I = \{0, 1, 2, 3\}$ und die Übergangsmatrix

$$M = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Sei $A = \{3\}$, $H^A = \inf\{n \geq 0 \mid X_n \in A\}$, $h_i^A = P(H^A < \infty \mid X_0 = i)$, $k_i^A = \mathbf{E}(H^A \mid X_0 = i)$.

(a) Ist die Kommunikationsklasse $[0]$ transitiv, null oder positiv?

Lösung $[0] = I$, I ist endlich und abgeschlossen, also positiv.

$[0]$ ist $\boxed{\text{positiv}}$ *4 P.*

(b) Berechnen Sie h_1^A.

Lösung $h_3^A = 1$.
$h_0^A = \frac{1}{2}h_0^A + \frac{1}{2}h_1^A \Rightarrow h_0^A = h_1^A$.
$h_1^A = \frac{1}{2}h_0^A + \frac{1}{2}h_3^A \Rightarrow h_0^A = h_1^A = h_3^A$.

$h_1^A = \boxed{1}$ *6 P.*

(c) Berechnen Sie k_0^A.

Lösung $k_3^A = 0$.
$k_2^A = 1$.
$k_1^A = 1 + \frac{1}{2}k_0^A + \frac{1}{2}k_2^A = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}k_0^A$.
$k_0^A = 1 + \frac{1}{2}k_0^A + \frac{1}{2}k_1^A \Rightarrow k_0^A = \frac{7}{2} + \frac{1}{2}k_0^A \Rightarrow k_0^A = 7$.

$k_0^A = \boxed{7}$ *6 P.*

4. $(X_n)_{n\geq 0}$ sei eine Markovkette auf dem Zustandsraum $\mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Die Übergangswahrscheinlichkeiten seien

$$p_{i,i+1} = p_{i,0} = \tfrac{1}{2} \quad \text{für } i \in \{2^k - 1 \mid k \in \mathbf{N}_0\},$$
$$p_{i,i+1} = 1 \quad \text{für } i \notin \{2^k - 1 \mid k \in \mathbf{N}_0\}.$$

Sei

$$T_{ij} = \text{die benötigte Zeit (Anzahl Schritte), um von } i \text{ nach } j \text{ zu gelangen},$$
$$f_{ij}^{(n)} = P(T_{ij} = n)$$
$$f_{ij} = \sum_{1 \leq n < \infty} f_{ij}^{(n)}$$

(a) Berechnen Sie f_{00}.

Lösung $f_{00}^{(2^k)} = 2^{-(k+1)}$ für $k \in \mathbf{N}_0$, $f_{00}^{(n)} = 0$ für $n \notin \{2^k \mid k \in \mathbf{N}_0\}$.
$f_{00} = \sum_{k\in\mathbf{N}_0} f_{00}^{(2^k)} = \sum_{k\in\mathbf{N}_0} 2^{-(k+1)} = 1$.

$f_{00} =$ $\boxed{1}$ *5 P.*

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert $\nu_0 = \mathbf{E}T_{00}$.

Lösung $\nu_0 = \mathbf{E}T_{00} = \sum_{k\in\mathbf{N}_0} 2^k \cdot 2^{-(k+1)} = \infty$.

$\nu_0 =$ $\boxed{\infty}$ *5 P.*

(c) Bestimmen Sie die Kommunikationsklasse $[0]$.

Lösung Alle Zustände kommunizieren: $[0] = \mathbf{N}_0$.

$[0] =$ $\boxed{\mathbf{N}_0}$ *5 P.*

(d) Ist der Zustand 2 transient, null oder positiv?

Lösung Der Zustandsraum ist eine kommunizierende Klasse, der Zustand 0 ist null, also (Class Property Theorem) ist auch der Zustand 2 null.

Der Zustand 2 ist $\boxed{\text{null}}$ *5 P.*

5. Wir betrachten das Warteschlangenmodell M/M/1 mit Ankunftsrate λ und Bedienrate μ. Sei $\mu = 3\lambda$.

(a) Zu wieviel Prozent der Zeit ist der Server *busy*?

Lösung $L_s = \rho = \lambda/\mu = 1/3$.

Antwort[1]: $\boxed{33.3\%}$ *2 P.*

(b) Zu wieviel Prozent der Zeit warten mindestens zwei Kunden in der Warteschlange?

Lösung Wenn mindestens zwei Kunden warten, sind mindestens drei im System.
$\sum_{n\geq 3}(1-\rho)\rho^n = (1-\rho)\rho^3/(1-\rho) = \rho^3 = 1/27$.

Antwort[1]: $\boxed{\approx 3.7\%}$ *4 P.*

(c) Der Server sei im Moment *busy*. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass als nächstes ein neuer Kunde ankommt, bevor der Kunde das System verlässt, der gerade bedient wird?

Lösung Die Wahrscheinlichkeit einer Ankunft ist $\lambda/(\lambda+\mu) = \lambda/(\lambda+3\lambda) = 1/4$.

Antwort[1]: $\boxed{25\%}$ *4 P.*

(d) Zu wieviel Prozent der Zeit ist kein Kunde im System?

Lösung $p_0 = 1 - \rho = 3/4$.

Antwort[1]: | 75% | *4 P.*

(e) Sei $N_q(t)$ die Anzahl der Kunden zur Zeit t in der Warteschlange.
Ist der Prozess $N_q(t)$ markovsch?

Lösung Nein. Angenommen, zur Zeit t kommt ein Kunde an und es ist $N_q(t) = 0$ und $N_s(t) = 1$. Dann geht N_q über zu 1. Ist dagegen $N_s(t) = 0$, dann bleibt N_q null und N_s geht über zu 1. Ob $N_s(t)$ null oder 1 ist, hängt von der "Vorgeschichte" ab.

Antwort ("ja" oder "nein"): | nein | *4 P.*