

Singulärwert-Zerlegung

nach G.Strang, MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra, Lecture 29

M. Gruber

14.01.2009

Zusammenfassung

Diagonalisierung $A = U\Sigma V^T$ beliebiger Matrizen
mit U orthogonal, Σ diagonal, V orthogonal.

Beispiel 1. [A invertierbar]

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 3\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^T$$

Wie findet man diese Singulärwert-Zerlegung?

Diagonalisiere $A^T A$ und $A A^T$!

Angenommen, es gibt eine Faktorisierung

$$A = U \Sigma V^T$$

mit Orthogonalmatrizen U, V und einer Diagonalmatrix Σ . Wie findet man U, V, Σ ?

1. $A^T A = V \Sigma U^T U \Sigma V^T = V \Sigma^2 V^T$.

Nichts anderes als die Diagonalisierung von $A^T A$! $A^T A$ ist symmetrisch, hat also orthogonale Eigenvektoren (sie können zumindest orthogonal gewählt werden). $A^T A$ ist positiv semidefinit, hat also nichtnegative Eigenwerte. Dazu passen die Vorzeichen der Diagonalelemente von Σ^2 .

2. $A A^T = U \Sigma V^T V \Sigma U^T = U \Sigma^2 U^T$.

Nichts anderes als die Diagonalisierung von $A A^T$! . . .

Beispiel 1. [Fortsetzung]

$$A^T A = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 7 \\ 7 & 25 \end{bmatrix}.$$

$$\sigma_1^2 = 32, v_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}; \quad \sigma_2^2 = 18, v_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

$$A A^T = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 32 & 0 \\ 0 & 18 \end{bmatrix}.$$

$$\sigma_1^2 = 32, u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \sigma_2^2 = 18, u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = 4\sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = 3\sqrt{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow AV = \Sigma U, \text{ ok!}$$

Beispiel 2. [A singularär] $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$.

$$A^T A = \begin{bmatrix} 80 & 60 \\ 60 & 45 \end{bmatrix}; \sigma_1^2 = 125, v_1 = \begin{bmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{bmatrix}; \sigma_2^2 = 0, v_2 = \begin{bmatrix} -3/5 \\ 4/5 \end{bmatrix}.$$

$$A A^T = \begin{bmatrix} 25 & 50 \\ 50 & 100 \end{bmatrix}; \sigma_1^2 = 125, u_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}; \sigma_2^2 = 0, u_2 = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{bmatrix} = 5\sqrt{5} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3/5 \\ 4/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ ok!}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4/5 & 3/5 \end{bmatrix}.$$

Mathematica-Beispiel

```
In[1] := a={{4.,3.},{8.,6.}}
```

```
Out[1]= {{4., 3.}, {8., 6.}}
```

```
In[2] := {u,w,v}=SingularValueDecomposition[a]
```

```
Out[2]= {{{-0.447214, -0.894427}, {-0.894427, 0.447214}},
```

```
> {{11.1803, 0.}, {0., 0.}}, {{-0.8, -0.6}, {-0.6, 0.8}}}
```

```
In[3] := u.w.Transpose[v]
```

```
Out[3]= {{4., 3.}, {8., 6.}}
```

Anwendung: Bilddatenreduktion



210×270 -Pixelmatrix. . .

. . . reduziert auf die zehn größten Singulärwerte

“Otto Lilienthal und sein Eindecker (1893)” (Ausschnitt),

Quelle: <http://germanhistorydocs.ghi-dc.org>

SVD-Rezept

Gegeben sei eine $m \times n$ -Matrix A mit $\text{rank } A = r$.

- Finde Eigenwerte $\sigma_1^2, \dots, \sigma_r^2$ von $A^T A$.
- finde Orthonormalbasis v_1, \dots, v_r aus Eigenvektoren von $A^T A$ für $C(A^T)$;
- finde Orthonormalbasis u_1, \dots, u_r aus Eigenvektoren von AA^T für $C(A)$.
- Sorge dafür, dass $Av_i = \sigma_i u_i$, $i = 1, \dots, r$ ist ($\sigma_i > 0$; ggf. Vorzeichen der Vektoren anpassen).