

# Symmetrische und positiv definite Matrizen

nach G.Strang, MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra, Lecture 25

M. Gruber

22.12.2009

M.Gruber, WS 2009/2010

Lineare Algebra

## Konjugation komplexer Zahlen

1. Für  $z = a + ib$  ist  $z^* = a - ib$  die zu  $z$  konjugiert-komplexe Zahl.
2. Es gilt  $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$  und  $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$ .
3. Für  $z = a + ib$  gilt  $z z^* = a^2 + b^2 = |z|^2$ .
4. Für Vektoren und Matrizen wird die Konjugation komponentenweise durchgeführt,
5. Für  $\mathbf{x} \in \mathbf{C}^n$  ist  $\mathbf{x}^{*T} \mathbf{x} = \sum_{1 \leq k \leq n} \mathbf{x}_k^* \mathbf{x}_k = \|\mathbf{x}\|^2$ .
6.  $\|\mathbf{x}\|$  ist die Länge des Vektors  $\mathbf{x}$ .

## Symmetrische reelle Matrizen

**Satz.** *Eine reelle, symmetrische Matrix hat ausschließlich reelle Eigenwerte.*

*Beweis* Sei  $A$  reell,  $A^T = A$  und  $Ax = \lambda x$ . ( $\lambda$  und  $x$  können komplex sein.)

Linksmultiplikation der Gleichung  $Ax = \lambda x$  mit  $x^{*T}$  liefert. (a)  $x^{*T}Ax = \lambda x^{*T}x$ .

Konjugation und Transposition der Gleichung  $Ax = \lambda x$  liefert  $x^{*T}A = \lambda^* x^{*T}$ . ( $A$  ist reell!)

Multipliziert man anschließend von rechts mit  $x$ , erhält man (b)  $x^{*T}Ax = \lambda^* x^{*T}x$ .

Vergleich von (a) und (b) ergibt:  $\lambda$  ist reell. □

**Satz.** *Die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten einer reellen, symmetrischen Matrix sind orthogonal.*

*Beweis* Sei  $Ax = \lambda x$  und  $Ay = \mu y$  mit  $\lambda \neq \mu$ . Es ist  $\mu y^T x = y^T Ax$  und  $\lambda y^T x = y^T Ax$ .

Wegen  $\lambda \neq \mu$  muss  $y^T x = 0$  sein. □

2

**Satz.** *Sei  $A$  reell und symmetrisch.*

*Hat  $A$   $n$  verschiedene Eigenwerte, dann kann eine Eigenvektormatrix  $Q$  mit  $Q^T Q = I$  gewählt werden; es gilt dann*

$$A = Q\Lambda Q^T. \tag{1}$$

Mit  $Q = [q_1 \dots q_n]$  bedeutet (1)

$$A = \lambda_1 q_1 q_1^T + \dots + \lambda_n q_n q_n^T, \tag{2}$$

*d.h.  $A$  ist eine Linearkombination paarweise orthogonaler Projektoren.*

3

## Positive Definitheit

**Definition.** Eine reelle symmetrische Matrix ist positiv definit, wenn ihre sämtlichen Eigenwerte positiv sind (äquivalent: wenn ihre sämtlichen Pivotelemente positiv sind).

**Satz.** Die Determinante einer symmetrischen positiv definiten Matrix ist positiv.

Dieser Satz ist nicht so einfach umkehrbar:

**Beispiel.**  $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ .

**Satz.** Sind alle Subdeterminanten einer symmetrischen Matrix positiv, dann ist die Matrix positiv definit.

4

## Vier verschiedene Tests auf positive Definitheit

1. Sind alle Eigenwerte positiv?
2. Sind alle Subdeterminanten positiv?
3. Sind alle Pivots positiv?
4. Ist  $x^T Ax > 0$  für alle  $x \neq 0$ ?

5

**Beispiel.**  $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$  (positiv definit).

1. Charakteristische Gleichung  $\det(A - \lambda I) = 0$  lösen:

$$\lambda^2 - \underbrace{8}_{\text{trace } A} \lambda + \underbrace{11}_{\det A} = 0 \Rightarrow \lambda = 4 \pm \sqrt{5} \Rightarrow \lambda > 0.$$

2. Subdeterminanten berechnen:  $\det \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix} > 0$  und  $\det A = 11 > 0$ .

3. Pivots berechnen:  $5 > 0$  und  $11/5 > 0$ .

4. Quadratische Form untersuchen:  $x^T A x > 0$  für  $x \neq 0$ ?

$$x^T A x = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 = \underbrace{5}_{\text{Pivot}} \left(x_1 + \frac{2}{5}x_2\right)^2 + \underbrace{\frac{11}{5}}_{\text{Pivot}} x_2^2 > 0.$$

6

**Beispiel.**  $B = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$  (nicht positiv definit).

1. Charakteristische Gleichung  $\det(B - \lambda I) = 0$  lösen:

$$\lambda^2 - \underbrace{13}_{\text{trace } B} \lambda - \underbrace{22}_{\det B} = 0 \Rightarrow \lambda \in \{11, -2\} \Rightarrow \lambda \not> 0.$$

2. Subdeterminanten berechnen:  $\det \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} > 0$  und  $\det B = -22 < 0$ .

3. Pivots berechnen:  $2 > 0$  und  $-11 < 0$ .

4. Quadratische Form untersuchen:  $x^T B x > 0$  für  $x \neq 0$ ?

$$x^T B x = 2x_1^2 + 12x_1x_2 + 7x_2^2 = \underbrace{2}_{\text{Pivot}} (x_1 + 3x_2)^2 - \underbrace{11}_{\text{Pivot}} x_2^2 \not> 0.$$

7

Beispiel. [ $n = 3$ ] Ist  $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$  positiv definit?

- $\det(C - \lambda I) = -(\lambda - 2)(\lambda - (2 + \sqrt{2}))(\lambda - (2 - \sqrt{2}))$  (alle Eigenwerte positiv).
- $\det \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2$ ,  $\det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 3$ ,  $\det C = 4$  (alle Subdeterminanten positiv).
- Pivots:  $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}$  (alle positiv).
- Quadratische Form:  $x^T C x = 2x_1^2 - 2x_2x_1 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_2x_3 = 2(x_1 - \frac{1}{2}x_2)^2 + 2(x_3 - \frac{1}{2}x_2)^2 + x_2^2$ .  
 $x^T C x$  ist positiv für  $x \neq 0$ .