Symmetrische und positiv definite Matrizen

nach G.Strang, MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra, Lecture 25

M. Gruber

22.12.2009

Konjugation komplexer Zahlen

1. Für $z = a + ib$ ist $z^* = a - ib$ die zu z konjugiert-komplexe Zahl.

2. Es gilt $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$ und $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$.

3. Für $z = a + ib$ gilt $zz^* = a^2 + b^2 = |z|^2$.

4. Für Vektoren und Matrizen wird die Konjugation komponentenweise durchgeführt,

5. Für $x \in \mathbf{C}^n$ ist $x^{*T} x = \Sigma_{1 \leq k \leq n} x_k^* x_k = ||x||^2$.

6. $||x||$ ist die Länge des Vektors x.

Symmetrische reelle Matrizen

Satz. *Eine reelle, symmetrische Matrix hat ausschließlich reelle Eigenwerte.*

Beweis Sei A reell, $A^T = A$ und $Ax = \lambda x$. (λ und x können komplex sein.)

Linksmultiplikation der Gleichung $Ax = \lambda x$ mit x^{*T} liefert. (a) $x^{*T}Ax = \lambda x^{*T}x$.

Konjugation und Transposition der Gleichung $Ax = \lambda x$ liefert $x^{*T}A = \lambda^* x^{*T}$. ($A$ ist reell!)

Multipliziert man anschließend von rechts mit x, erhält man (b) $x^{*T}Ax = \lambda^* x^{*T}x$.

Vergleich von (a) und (b) ergibt: λ ist reell. $\square$

Satz. *Die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten einer reellen, symmetrischen Matrix sind orthogonal.*

Beweis Sei $Ax = \lambda x$ und $Ay = \mu y$ mit $\lambda \neq \mu$. Es ist $\mu y^T x = y^T Ax$ und $\lambda y^T x = y^T Ax$.

Wegen $\lambda \neq \mu$ muss $y^T x = 0$ sein. $\square$

Satz. *Sei A reell und symmetrisch.*

Hat A n verschiedene Eigenwerte, dann kann eine Eigenvektormatrix Q mit $Q^TQ = I$ gewählt werden; es gilt dann

$$A = Q\Lambda Q^T. \tag{1}$$

Mit $Q = [\, q_1 \cdots q_n \,]$ bedeutet (1)

$$A = \lambda_1 q_1 q_1^T + \ldots + \lambda_1 q_n q_n^T, \tag{2}$$

d.h. A ist eine Linearkombination paarweise orthogonaler Projektoren.

Positive Definitheit

Definition. *Eine reelle symmetrische Matrix ist positiv definit, wenn ihre sämtlichen Eigenwerte positiv sind (äquivalent: wenn ihre sämtlichen Pivotelemente positiv sind).*

Satz. *Die Determinante einer symmetrischen positiv definiten Matrix ist positiv.*

Dieser Satz ist nicht so einfach umkehrbar:

Beispiel. $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}.$

Satz. *Sind alle Subdeterminanten einer symmetrischen Matrix positiv, dann ist die Matrix positiv definit.*

Vier verschiedene Tests auf positive Definitheit

1. Sind alle Eigenwerte positiv?

2. Sind alle Subdeterminanten positiv?

3. Sind alle Pivots positiv?

4. Ist $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} > 0$ für alle $\boldsymbol{x} \neq 0$?

Beispiel. $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ *(positiv definit).*

1. *Charakteristische Gleichung* $\det(A - \lambda I) = 0$ *lösen:*

$$\lambda^2 - \underbrace{8}_{\text{trace } A} \lambda + \underbrace{11}_{\det A} = 0 \Rightarrow \lambda = 4 \pm \sqrt{5} \Rightarrow \lambda > 0.$$

2. *Subdeterminanten berechnen:* $\det \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix} > 0$ *und* $\det A = 11 > 0$.
3. *Pivots berechnen:* $5 > 0$ *und* $11/5 > 0$.
4. *Quadratische Form untersuchen:* $\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} > 0$ *für* $\boldsymbol{x} \neq 0$?

$$\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 = \underbrace{5}_{\textit{Pivot}} (x_1 + \tfrac{2}{5}x_2)^2 + \underbrace{\tfrac{11}{5}}_{\textit{Pivot}} x_2^2 > 0.$$

Beispiel. $B = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ *(nicht positiv definit).*

1. *Charakteristische Gleichung* $\det(B - \lambda I) = 0$ *lösen:*

$$\lambda^2 - \underbrace{13}_{\operatorname{trace} B} \lambda \underbrace{-22}_{\det B} = 0 \Rightarrow \lambda \in \{11, -2\} \Rightarrow \lambda \not> 0.$$

2. *Subdeterminanten berechnen:* $\det \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} > 0$ *und* $\det B = -22 < 0$.
3. *Pivots berechnen:* $2 > 0$ *und* $-11 < 0$.
4. *Quadratische Form untersuchen:* $\boldsymbol{x}^T B \boldsymbol{x} > 0$ *für* $\boldsymbol{x} \neq 0$*?*

$$\boldsymbol{x}^T B \boldsymbol{x} = 2x_1^2 + 12x_1x_2 + 7x_2^2 = \underbrace{2}_{\textit{Pivot}} (x_1 + 3x_2)^2 \underbrace{-11}_{\textit{Pivot}} x_2^2 \not> 0.$$

Beispiel. $[n = 3]$ *Ist* $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ *positiv definit?*

- $\det(C - \lambda I) = -(\lambda - 2)(\lambda - (2 + \sqrt{2}))(\lambda - (2 - \sqrt{2}))$ *(alle Eigenwerte positiv).*
- $\det \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} = 2$, $\det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 3$, $\det C = 4$ *(alle Subdeterminanten positiv).*
- *Pivots:* $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}$ *(alle positiv).*
- *Quadratische Form:* $x^T C x = 2x_1^2 - 2x_2x_1 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_2x_3 = 2(x_1 - \frac{1}{2}x_2)^2 + 2(x_3 - \frac{1}{2}x_2)^2 + x_2^2$.
  $x^T C x$ *ist positiv für* $x \neq 0$.