Fourier-Reihen

nach G.Strang, MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra, Lecture 24

M. Gruber

07.01.2010, Rev.1

Projektion mit einer Orthonormalbasis

Angenommen, $q_1, \ldots, q_n$ ist eine Orthonormalbasis (ONB) und $Q = \begin{bmatrix} q_1 & \ldots & q_n \end{bmatrix}$.
Ein Vektor v soll bezüglich der gegebenen ONB in der Form

$$v = c_1 q_1 + \ldots + c_n q_n.$$

dargestellt (entwickelt) werden. Wie findet man die Koeffizienten $c_1, \ldots, c_n$?

Ganz einfach:

$$q_i^T v = c_1 q_i^T q_1 + \ldots + c_n q_i^T q_n = c_i.$$

Kurz:

$$v = Qc, \quad c = Q^T v.$$

Dieses Konzept übertragen wir nun auf einen Funktionenraum.

Eine ONB für 2π-periodische Funktionen

Betrachte die Funktionen (sie spielen jetzt die Rolle der Vektoren)

$$\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}, \tfrac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \tfrac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \ldots, \tfrac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \tfrac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \ldots$$

Sie sind paarweise orthogonal (siehe Lemmata 1 und 2) bezüglich des Skalarprodukts

$$(f,g) = \textstyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx.$$

Sie haben Länge 1 (siehe Lemma 3) bezüglich der Norm

$$||f|| = (f,f)^{1/2} = \left(\textstyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx\right)^{1/2}.$$

M.Gruber, WS 2009/2010 Lineare Algebra

Fourier-Reihen

Eine 2π-periodischen Funktion f soll in der Form

$$f(x) = a_0 + a_1\cos x + b_1\sin x + a_2\cos 2x + b_2\sin 2x + \ldots$$

entwickelt werden. Wie lauten die Koeffizienten $a_0, a_1, b_1, \ldots$?

$$a_0 = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}(\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}, f) = \tfrac{1}{2\pi}\textstyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx,$$

$$a_n = \tfrac{1}{\sqrt{\pi}}(\tfrac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, f) = \tfrac{1}{\pi}\textstyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx,$$
$$b_n = \tfrac{1}{\sqrt{\pi}}(\tfrac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, f) = \tfrac{1}{\pi}\textstyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

Lemma 1. *Für $m, n \in \mathbf{N}$ ist*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx \, dx = 0$$

Beweis $u(x) = \sin mx \cos nx$ ist eine ungerade Funktion: $u(-x) = -u(x)$ und daher

$$\int_{-\pi}^{0} u(x) \, dx = -\int_{-\pi}^{0} u(-x) \, dx.$$

Variablentransformation ($t = -x, dt = -dx$) liefert (Integrationsgrenzen werden mittransformiert!)

$$-\int_{-\pi}^{0} u(-x) \, dx = \int_{\pi}^{0} u(t) \, dt.$$

Vertauschung der Integrationsgrenzen bedeutet Vorzeichenwechsel des (Riemann-)Integrals:

$$\int_{\pi}^{0} u(x) \, dx = -\int_{0}^{\pi} u(x) \, dx.$$

Die beiden Integralteile heben sich also auf. □

Lemma 2. *Für $m, n \in \mathbf{N}, m \neq n$ ist*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = 0 \quad \textit{und} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = 0$$

Beweis Man integriere jeweils zweimal partiell:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx &= \tfrac{n}{m} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx \\ &= (\tfrac{n}{m})^2 \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx. \end{aligned}$$

$$\text{Ebenso ist} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = (\tfrac{n}{m})^2 \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx.$$

Da $\frac{n}{m} \neq 1$ ist, müssen die Integrale null sein. □

Lemma 3. *Für $m \in \mathbf{N}, m > 0$ ist*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx\,dx = \pi \quad \textit{und} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx\,dx = \pi$$

Beweis Wegen $\sin^2 mx + \cos^2 mx = 1$ ist

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx\,dx = 2\pi.$$

Außerdem sind die beiden Integrale gleich groß. □

Mathematica-Beispiel

Approximierende der Funktion $f(x) = (x \bmod \pi/2)^2$ für $n = 0, 4, 8, 12, 16, 20$: