

Fourier-Reihen

nach G.Strang, MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra, Lecture 24

M. Gruber

07.01.2010, Rev.1

Projektion mit einer Orthonormalbasis

Angenommen, q_1, \dots, q_n ist eine Orthonormalbasis (ONB) und $Q = \begin{bmatrix} q_1 & \dots & q_n \end{bmatrix}$.

Ein Vektor v soll bezüglich der gegebenen ONB in der Form

$$v = c_1 q_1 + \dots + c_n q_n.$$

dargestellt (entwickelt) werden. Wie findet man die Koeffizienten c_1, \dots, c_n ?

Ganz einfach:

$$q_i^T v = c_1 q_i^T q_1 + \dots + c_n q_i^T q_n = c_i.$$

Kurz:

$$v = Qc, \quad c = Q^T v.$$

Dieses Konzept übertragen wir nun auf einen Funktionenraum.

Eine ONB für 2π -periodische Funktionen

Betrachte die Funktionen (sie spielen jetzt die Rolle der Vektoren)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \dots$$

Sie sind paarweise orthogonal (siehe Lemmata 1 und 2) bezüglich des Skalarprodukts

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx.$$

Sie haben Länge 1 (siehe Lemma 3) bezüglich der Norm

$$\|f\| = (f, f)^{1/2} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx \right)^{1/2}.$$

Fourier-Reihen

Eine 2π -periodischen Funktion f soll in der Form

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots$$

entwickelt werden. Wie lauten die Koeffizienten a_0, a_1, b_1, \dots ?

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, f \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, f \right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, f \right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

Lemma 1. Für $m, n \in \mathbf{N}$ ist

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx \, dx = 0$$

Beweis $u(x) = \sin mx \cos nx$ ist eine ungerade Funktion: $u(-x) = -u(x)$ und daher

$$\int_{-\pi}^0 u(x) \, dx = - \int_{-\pi}^0 u(-x) \, dx.$$

Variablentransformation ($t = -x, dt = -dx$) liefert (Integrationsgrenzen werden mittransformiert!)

$$- \int_{-\pi}^0 u(-x) \, dx = \int_{\pi}^0 u(t) \, dt.$$

Vertauschung der Integrationsgrenzen bedeutet Vorzeichenwechsel des (Riemann-)Integrals:

$$\int_{\pi}^0 u(x) \, dx = - \int_0^{\pi} u(x) \, dx.$$

Die beiden Integralteile heben sich also auf. □

Lemma 2. Für $m, n \in \mathbf{N}$, $m \neq n$ ist

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = 0 \quad \text{und} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = 0$$

Beweis Man integriere jeweils zweimal partiell:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx &= \frac{n}{m} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx \\ &= \left(\frac{n}{m}\right)^2 \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx. \end{aligned}$$

$$\text{Ebenso ist} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \left(\frac{n}{m}\right)^2 \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx.$$

Da $\frac{n}{m} \neq 1$ ist, müssen die Integrale null sein.

□

Lemma 3. Für $m \in \mathbf{N}, m > 0$ ist

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx \, dx = \pi \quad \text{und} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx \, dx = \pi$$

Beweis Wegen $\sin^2 mx + \cos^2 mx = 1$ ist

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx \, dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx \, dx = 2\pi.$$

Außerdem sind die beiden Integrale gleich groß. □

Mathematica-Beispiel

Approximierende der Funktion $f(x) = (x \bmod \pi/2)^2$ für $n = 0, 4, 8, 12, 16, 20$:

