

Markov-Matrizen

nach G.Strang, MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra, Lecture 24

M. Gruber

07.01.2010

M.Gruber, WS 2009/2010

Lineare Algebra

Beispiel 1. • Zustandsraum: $\{1, 2\}$.

- Übergangswahrscheinlichkeiten:

$$\begin{array}{ll} P(1 \rightsquigarrow 1) = 0.9 & P(2 \rightsquigarrow 1) = 0.2 \\ P(1 \rightsquigarrow 2) = 0.1 & P(2 \rightsquigarrow 2) = 0.8 \end{array} \quad \text{d.h. man hat die Übergangsmatrix } \begin{bmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}.$$

- Angenommen, das System ist zu Beginn im Zustand 2.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist es im Zustand 1 bzw. 2

- ... nach 100 Schritten?
- ... nach “ ∞ ” vielen Schritten?

Markov-Matrizen

1. (Definition:) Markov-Matrizen sind quadratisch.
2. (Definition:) Markov-Matrizen haben nichtnegative Komponenten.
3. (Definition:) Spalten von Markov-Matrizen summieren sich zu 1.
4. Markov-Matrix \times Wahrscheinlichkeits-Vektor = ein Wahrscheinlichkeits-Vektor.
5. (Markov-Matrix)^k = eine Markov-Matrix (mit den Übergangswahrscheinlichkeiten für k Schritte).

2

Eigenwerte von Markov-Matrizen

Wir betrachten $n \times n$ -Markov-Matrizen mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (nicht notwendig alle verschieden) und zugehörigen Eigenvektoren $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$.

1. Die Eigenwerte einer Matrix sind auch die ihrer Transponierten.

Beweis $\det(A - \lambda I) = \det(A^T - \lambda I)$. □

2. Für alle Eigenwerte λ einer Markov-Matrix gilt $|\lambda| \leq 1$.

Beweis Sei λ_1 der Eigenwert mit dem größten Absolutbetrag. Sei $A^T \mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x}$ mit $\mathbf{x} \neq 0$. Sei \mathbf{x}_k die Komponente von \mathbf{x} mit dem größten Absolutbetrag. Zeile k von $A^T \mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x}$ besagt: $\sum_{1 \leq j \leq n} a_{kj} \mathbf{x}_j = \lambda_1 \mathbf{x}_k$. Damit gilt: $|\lambda_1| |\mathbf{x}_k| \leq \sum_{1 \leq j \leq n} a_{kj} |\mathbf{x}_j| \leq |\mathbf{x}_k|$. Also ist $|\lambda_1| \leq 1$. □

3. Mindestens ein Eigenwert einer Markov-Matrix ist gleich 1.

Beweis $A - I$ ist singulär. □

3

Stationarität

Sei $\lambda_1 = 1$ und $|\lambda_i| < 1$ für $i > 1$, und seien \mathbf{x}_i die zugehörigen Eigenvektoren.

Sei $\mathbf{u}_0 \geq \mathbf{0}$ eine Anfangsverteilung (Komponentensumme gleich 1).

1. Eigenvektordarstellung von \mathbf{u}_0 : $\mathbf{u}_0 = c_1 \mathbf{x}_1 + \dots + c_n \mathbf{x}_n$ (Lösung von $S\mathbf{c} = \mathbf{u}_0$).
2. Entwicklung des Systems: $\mathbf{u}_k := A^k \mathbf{u}_0 = c_1 \lambda_1^k \mathbf{x}_1 + \dots + c_n \lambda_n^k \mathbf{x}_n$.
3. Stationärer Zustand (*steady state*): $\mathbf{u}_\infty := \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{u}_k = c_1 \mathbf{x}_1$.
4. $A\mathbf{u}_\infty = \mathbf{u}_\infty$. $\mathbf{u}_\infty \geq \mathbf{0}$. Komponentensumme von \mathbf{u}_∞ ist gleich 1.

4

Beispiel 1. [Fortsetzung]

$$A = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 0.7, \quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \mathbf{x}_1 + \frac{2}{3} \mathbf{x}_2, \quad \mathbf{u}_k = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{2}{3} \cdot 0.7^k \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

5

