

# Markov-Matrizen

nach G.Strang, MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra, Lecture 24

M. Gruber

07.01.2010

**Beispiel 1.** • *Zustandsraum: {1, 2}.*

- *Übergangswahrscheinlichkeiten:*

$$\begin{array}{ll} P(1 \rightsquigarrow 1) = 0.9 & P(2 \rightsquigarrow 1) = 0.2 \\ P(1 \rightsquigarrow 2) = 0.1 & P(2 \rightsquigarrow 2) = 0.8 \end{array} \quad \text{d.h. man hat die Übergangsmatrix } \begin{bmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}.$$

- *Angenommen, das System ist zu Beginn im Zustand 2.*

*Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist es im Zustand 1 bzw. 2*

- *... nach 100 Schritten?*
- *... nach “ $\infty$ ” vielen Schritten?*

# Markov-Matrizen

1. (Definition:) Markov-Matrizen sind quadratisch.
2. (Definition:) Markov-Matrizen haben nichtnegative Komponenten.
3. (Definition:) Spalten von Markov-Matrizen summieren sich zu  $\mathbf{1}$ .
4. Markov-Matrix  $\times$  Wahrscheinlichkeits-Vektor = ein Wahrscheinlichkeits-Vektor.
5. (Markov-Matrix) <sup>$k$</sup>  = eine Markov-Matrix (mit den Übergangswahrscheinlichkeiten für  $k$  Schritte).

# Eigenwerte von Markov-Matrizen

Wir betrachten  $n \times n$ -Markov-Matrizen mit Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  (nicht notwendig alle verschieden) und zugehörigen Eigenvektoren  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ .

1. Die Eigenwerte einer Matrix sind auch die ihrer Transponierten.

*Beweis*  $\det(A - \lambda I) = \det(A^T - \lambda I)$ . □

2. Für alle Eigenwerte  $\lambda$  einer Markov-Matrix gilt  $|\lambda| \leq 1$ .

*Beweis* Sei  $\lambda_1$  der Eigenwert mit dem größten Absolutbetrag. Sei  $A^T \mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x}$  mit  $\mathbf{x} \neq 0$ .

Sei  $\mathbf{x}_k$  die Komponente von  $\mathbf{x}$  mit dem größten Absolutbetrag. Zeile  $k$  von  $A^T \mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x}$  besagt:

$\sum_{1 \leq j \leq n} a_{kj} \mathbf{x}_j = \lambda_1 \mathbf{x}_k$ . Damit gilt:  $|\lambda_1| |\mathbf{x}_k| \leq \sum_{1 \leq j \leq n} a_{kj} |\mathbf{x}_j| \leq |\mathbf{x}_k|$ . Also ist  $|\lambda_1| \leq 1$ . □

3. Mindestens ein Eigenwert einer Markov-Matrix ist gleich 1.

*Beweis*  $A - I$  ist singulär. □

# Stationarität

Sei  $\lambda_1 = 1$  und  $|\lambda_i| < 1$  für  $i > 1$ , und seien  $\mathbf{x}_i$  die zugehörigen Eigenvektoren.

Sei  $\mathbf{u}_0 \geq \mathbf{0}$  eine Anfangsverteilung (Komponentensumme gleich 1).

1. Eigenvektordarstellung von  $\mathbf{u}_0$ :  $\mathbf{u}_0 = c_1\mathbf{x}_1 + \dots + c_n\mathbf{x}_n$  (Lösung von  $S\mathbf{c} = \mathbf{u}_0$ ).
2. Entwicklung des Systems:  $\mathbf{u}_k := A^k\mathbf{u}_0 = c_1\lambda_1^k\mathbf{x}_1 + \dots + c_n\lambda_n^k\mathbf{x}_n$ .
3. Stationärer Zustand (*steady state*):  $\mathbf{u}_\infty := \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{u}_k = c_1\mathbf{x}_1$ .
4.  $A\mathbf{u}_\infty = \mathbf{u}_\infty$ .  $\mathbf{u}_\infty \geq \mathbf{0}$ . Komponentensumme von  $\mathbf{u}_\infty$  ist gleich 1.

**Beispiel 1. [Fortsetzung]**

$$A = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0.7, \quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\mathbf{x}_1 + \frac{2}{3}\mathbf{x}_2, \quad \mathbf{u}_k = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{2}{3} \cdot 0.7^k \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

