

# Differentialgleichungen und Exponentialfunktion einer Matrix

nach G.Strang, MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra, Lecture 23

M. Gruber

17.12.2009

## Zusammenfassung

Lineare Differentialgleichungssysteme 1.Ordnung  $\frac{d}{dt}u = Au$ .

Die Exponentialfunktion  $e^{At}$  einer Matrix  $A$ .

M.Gruber, WS 2009/2010

Lineare Algebra

**Beispiel 1.** [ $n = 1$ ] Für  $u_0 \in \mathbf{R}$  und  $a \in \mathbf{R}$  löse man das Anfangswertproblem

$$u(0) = u_0, \quad u'(t) = au(t).$$

Man kennt alle Ableitungen der Lösung:

$$u''(t) = au'(t) = a^2u(t), \dots, u^{(k)}(t) = a^k u(t).$$

Also hat man eine Taylorentwicklung der Lösung:

$$u(t) = u(0) + u'(0)t + u''(0)t^2/2! + \dots = \sum_{0 \leq k < \infty} \frac{(at)^k}{k!} u_0 = e^{at} u_0.$$

**Beispiel 2. [ $n = 2$ ]** Man löse das Anfangswertproblem

$$u(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u'(t) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} u(t).$$

Es handelt sich hier um ein gekoppeltes System:

$$u_1(0) = 1, \quad u_1'(t) = -u_1(t) + 2u_2(t),$$

$$u_2(0) = 0, \quad u_2'(t) = u_1(t) - 2u_2(t).$$

Die Kunst besteht im Entkoppeln (Diagonalisieren).

Entkoppeln sieht so aus:  $u(t) = e^{At}u_0$ .

Was ist  $e^{At}$ ?

2

## $e^{At}$ für diagonalisierbares $A$

Die  $n \times n$ -Matrix  $A$  sei diagonalisierbar:  $A = S\Lambda S^{-1} = S \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) S^{-1}$ .

$$\begin{aligned} e^{At} &= \sum_{0 \leq k < \infty} (At)^k / k! \\ &= \sum_{0 \leq k < \infty} (t^k / k!) S \Lambda^k S^{-1} \\ &= S \left( \sum_{0 \leq k < \infty} (t^k / k!) \Lambda^k \right) S^{-1} \\ &= S \operatorname{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}) S^{-1} \\ &= S e^{\Lambda t} S^{-1}. \end{aligned}$$

$e^{At}$  ist eine  $n \times n$ -Matrix mit  $\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At}$ .

3

**Beispiel 2. [Fortsetzung]** 1. *Eigensystem von A:*

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = (-3) \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2. *Eigenvektordarstellung des Anfangswerts:*

$$u_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3. *Lösung:*

$$u(t) = \frac{1}{3} e^{0t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} e^{-3t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} e^{-3t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

4. *Stationäre Lösung (steady state):*  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}.$ 

4

**Wie man  $u(0) = u_0, u'(t) = Au(t)$  löst<sup>1</sup>**

1. Bestimme  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  und  $S = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix}$ .
2. Stelle  $u_0$  als Linearkombination der Eigenvektoren dar:  $u_0 = Sc$ .
3. Schreibe die Lösung als  $u(t) = Se^{\Lambda t}c = c_1 e^{\lambda_1 t} x_1 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} x_n$ .
- 4.(a) Sind alle  $|\Re \lambda_i| < 1$ <sup>2</sup>, dann gilt  $u(t) \rightarrow 0$  (Stabilität).  
 (b) Ist  $\lambda_1 = 0$  und  $|\Re \lambda_i| < 0$  für  $i \geq 2$ , dann gilt  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = x_1$  (Stationarität).  
 (c) Ist  $|\Re \lambda_i| > 1$  für ein  $i$ , dann "explodiert" die Lösung (*blow-up*).

<sup>1</sup>wenn  $A$  diagonalisierbar ist<sup>2</sup> $\Re z$  = Realteil von  $z$ ,  $\Im z$  = Imaginärteil von  $z$ .

## Wie man $y'' + by' + ky = 0$ löst

Zu lösen sei die lineare Differenzialgleichung 2.Ordnung

$$y'' + by' + ky = 0, \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1.$$

(Trick:) Schreibe die Gleichung um in ein System 1.Ordnung

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y'' \\ y' \end{bmatrix}}_{u'} = \underbrace{\begin{bmatrix} -b & -k \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} y' \\ y \end{bmatrix}}_u, \quad \underbrace{\begin{bmatrix} y'(0) \\ y(0) \end{bmatrix}}_{u(0)} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

und löse. . .