Differentialgleichungen und Exponentialfunktion einer Matrix

nach G.Strang, MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra, Lecture 23

M. Gruber

17.12.2009

Zusammenfassung

Lineare Differentialgleichungssysteme 1.Ordnung $\frac{d}{dt}u = Au$.

Die Exponentialfunktion e^{At} einer Matrix A.

Beispiel 1. $[n = 1]$ *Für $u_0 \in \mathbf{R}$ und $a \in \mathbf{R}$ löse man das Anfangswertproblem*

$$u(0) = u_0, \quad u'(t) = au(t).$$

Man kennt alle Ableitungen der Lösung:

$$u''(t) = au'(t) = a^2u(t), \ldots, u^{(k)}(t) = a^k u(t).$$

Also hat man eine Taylorentwicklung der Lösung:

$$u(t) = u(0) + u'(0)t + u''(0)t^2/2! + \ldots = \sum_{0 \leq k < \infty} \frac{(at)^k}{k!} u_0 = e^{at} u_0.$$

Beispiel 2. $[n = 2]$ *Man löse das Anfangswertproblem*

$$u(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u'(t) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} u(t).$$

Es handelt sich hier um ein gekoppeltes System:

$$u_1(0) = 1, \quad u_1'(t) = -u_1(t) + 2u_2(t),$$

$$u_2(0) = 0, \quad u_2'(t) = u_1(t) - 2u_2(t).$$

Die Kunst besteht im Entkoppeln (Diagonalisieren).

Entkoppeln sieht so aus: $u(t) = e^{At}u_0$. *Was ist* e^{At}*?*

e^{At} für diagonalisierbares A

Die $n \times n$-Matrix A sei diagonalisierbar: $A = S\Lambda S^{-1} = S\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)S^{-1}$.

$$\begin{aligned}
e^{At} &= \sum_{0\le k<\infty} (At)^k/k! \\
&= \sum_{0\le k<\infty} (t^k/k!)S\Lambda^k S^{-1} \\
&= S\left(\sum_{0\le k<\infty} (t^k/k!)\Lambda^k\right) S^{-1} \\
&= S\,\mathrm{diag}(e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t})S^{-1} \\
&= Se^{\Lambda t}S^{-1}.
\end{aligned}$$

e^{At} ist eine $n \times n$-Matrix mit $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$.

Beispiel 2. [Fortsetzung] *1. Eigensystem von A:*

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = (-3) \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2. Eigenvektordarstellung des Anfangswerts:

$$u_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \tfrac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3. Lösung:

$$u(t) = \tfrac{1}{3} e^{0t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \tfrac{1}{3} e^{-3t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \tfrac{1}{3} e^{-3t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

4. Stationäre Lösung (steady state)*:* $\lim_{t\to\infty} u(t) = \left[\begin{smallmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{smallmatrix}\right]$.

Wie man $u(0) = u_0, u'(t) = Au(t)$ löst[1]

1. Bestimme $\Lambda = \mathbf{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ und $S = \begin{bmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{bmatrix}$.

2. Stelle u_0 als Linearkombination der Eigenvektoren dar: $u_0 = Sc$.

3. Schreibe die Lösung als $u(t) = Se^{\Lambda t}c = c_1 e^{\lambda_1 t} x_1 + \ldots + c_n e^{\lambda_n t} x_n$.

4.(a) Sind alle $|\Re\lambda_i| < 1$ [2], dann gilt $u(t) \to 0$ (Stabilität).

(b) Ist $\lambda_1 = 0$ und $|\Re\lambda_i| < 0$ für $i \geq 2$, dann gilt $\lim_{t\to\infty} u(t) = x_1$ (Stationarität).

(c) Ist $|\Re\lambda_i| > 1$ für ein i, dann "explodiert" die Lösung (*blow-up*).

---

[1] wenn A diagonalisierbar ist

[2] $\Re z$ = Realteil von z, $\Im z$ = Imaginärteil von z.

Wie man $y'' + by' + ky = 0$ löst

Zu lösen sei die lineare Differenzialgleichung 2.Ordnung

$$y'' + by' + ky = 0, \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1.$$

(Trick:) Schreibe die Gleichung um in ein System 1.Ordnung

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y'' \\ y' \end{bmatrix}}_{u'} = \underbrace{\begin{bmatrix} -b & -k \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} y' \\ y \end{bmatrix}}_{u}, \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} y'(0) \\ y(0) \end{bmatrix}}_{u(0)} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

und löse. . .