# Diagonalisierung; Matrix-Potenzen

**nach G.Strang, MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra, Lecture 22**

M. Gruber

15.12.2009

## Zusammenfassung

Diagonalisierung: $S^{-1}AS = \Lambda$.

Matrix-Potenzen: $A^k \to ?$.

Differenzengleichung: $u_{k+1} = Au_k$; $u_k \to ?$.



## Eigenvektormatrix $S$ und Eigenwertmatrix $\Lambda$

Sei $A$ eine $n \times n$-Matrix.

$A$ habe Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ und linear unabhängige Eigenvektoren $x_1, \ldots, x_n$. Schreibe die Eigenvektoren als Spalten in eine Matrix $S = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$: $S$ ist invertierbar.

$$\begin{aligned} AS &= \begin{bmatrix} Ax_1 & \ldots & Ax_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 x_1 & \ldots & \lambda_n x_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{bmatrix} \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \\ &= S\Lambda. \end{aligned}$$

$S$ heißt "Eigenvektormatrix" und $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ "Eigenwertmatrix".

# Diagonalisierung

Ist $S$ invertierbar, dann ist $S^{-1}AS = \Lambda$ ("Diagonalisierung") und $A = S\Lambda S^{-1}$.

Nach der Diagonalisierung weiß man mehr über das Verhalten von $A^k$:

**Satz.** *Ist $|\lambda_i| < 1$ für alle $i$, dann konvergiert $A^k \to O$ für $k \to \infty$.*

*Beweis*

$$\begin{aligned} A^k &= (S\Lambda S^{-1})(S\Lambda S^{-1})\cdots(S\Lambda S^{-1})(S\Lambda^k S^{-1}) \\ &= S\Lambda(S^{-1}S)\Lambda(S^{-1}S)\cdots(S^{-1}S)\Lambda(S^{-1}S)\Lambda S^{-1} \\ &= S\Lambda^k S^{-1} \to O \text{ für } k \to \infty. \end{aligned}$$

□





# Diagonalisierbarkeit

Welche Matrizen sind diagonalisierbar?

**Fakt 1.** *Hat $A$ $n$ verschiedene Eigenwerte, dann sind die zugehörigen $n$ Eigenvektoren linear unabhängig (und damit $S$ invertierbar, folglich $A$ diagonalisierbar).*

*Beweis* [1], 6.2, 6E □

**Fakt 2.** *Hat $A$ mehrfache (engl.* repeated*) Eigenwerte, dann kann $A$ $n$ linear unabhängige Eigenwerte haben oder auch nicht.*

**Beispiel 1.** *$I$ hat $n$-fachen Eigenwert 1 und jeder Vektor $\neq 0$ ist Eigenvektor.*

**Beispiel 2.** *$\left[\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right]$ hat doppelten Eigenwert 2 und nur einen linear unabhängigen Eigenvektor ("geometrische Vielfachheit" 1, "algebraische Vielfachheit" 2).*

# Differenzengleichung $u_{k+1} = Au_k$

Gegeben: Anfangswert $u_0$, Matrix $A$ und die Rekursion $u_{k+1} = Au_k$.

Schreibe $u_0$ als Linearkombination der Eigenvektoren: $u_0 = Sc$.

Nun ist

$$\begin{aligned} u_k &= A^k u_0 \\ &= S\Lambda^k S^{-1} Sc \\ &= S\Lambda^k c \\ &= c_1\lambda_1^k x_1 + \ldots + c_n \lambda_n^k x_n. \end{aligned}$$





**Beispiel 3. [Fibonacci]**

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_{k+2} = F_{k+1} + F_k \quad \textit{(2.Ordnung!)}.$$

*Mit einem schönen Trick wird daraus ein System 1. Ordnung:*

$$u_0 = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_0 \end{bmatrix}, \quad u_{k+1} = \begin{bmatrix} F_{k+2} \\ F_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{bmatrix}$$

$A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ *hat Eigenwerte* $\lambda_1 = (1+\sqrt{5})/2$ *und* $\lambda_2 = (1-\sqrt{5})/2$ *mit zugehörigen Eigenvektoren* $x_1 = \left[\begin{smallmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$ *und* $x_2 = \left[\begin{smallmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$*. Es ist* $\lambda_1 > 1$ *und* $|\lambda_2| < 1$*.*

$$u_0 = \tfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{bmatrix} - \tfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_k = \tfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \lambda_1^k \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{bmatrix} - \tfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \lambda_2^k \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{bmatrix} \approx \tfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \lambda_1^k \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

# Literatur

[1] Gilbert Strang. *Introduction to Linear Algebra*. Wellesley-Cambridge Press, third edition, 2003.