Diagonalisierung; Matrix-Potenzen

nach G.Strang, MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra, Lecture 22

M. Gruber

15.12.2009

Zusammenfassung

Diagonalisierung: $S^{-1}AS = \Lambda$.

Matrix-Potenzen: $A^k \to$?.

Differenzengleichung: $u_{k+1} = Au_k$; $u_k \to$?.

Eigenvektormatrix S und Eigenwertmatrix Λ

Sei A eine $n \times n$-Matrix.

A habe Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ und linear unabhängige Eigenvektoren $x_1, \ldots, x_n$. Schreibe die Eigenvektoren als Spalten in eine Matrix $S = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$: S ist invertierbar.

$$\begin{aligned} AS &= \begin{bmatrix} Ax_1 & \ldots & Ax_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 x_1 & \ldots & \lambda_n x_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{bmatrix} \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \\ &= S\Lambda. \end{aligned}$$

S heißt "Eigenvektormatrix" und $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ "Eigenwertmatrix".

Diagonalisierung

Ist S invertierbar, dann ist $S^{-1}AS = \Lambda$ ("Diagonalisierung") und $A = S\Lambda S^{-1}$.

Nach der Diagonalisierung weiß man mehr über das Verhalten von A^k:

Satz. *Ist $|\lambda_i| < 1$ für alle i, dann konvergiert $A^k \to O$ für $k \to \infty$.*

Beweis

$$\begin{aligned} A^k &= (S\Lambda S^{-1})(S\Lambda S^{-1})\cdots(S\Lambda S^{-1})(S\Lambda^k S^{-1}) \\ &= S\Lambda(S^{-1}S)\Lambda(S^{-1}S)\cdots(S^{-1}S)\Lambda(S^{-1}S)\Lambda S^{-1} \\ &= S\Lambda^k S^{-1} \to O \text{ für } k \to \infty. \end{aligned}$$

□

Diagonalisierbarkeit

Welche Matrizen sind diagonalisierbar?

Fakt 1. *Hat A n verschiedene Eigenwerte, dann sind die zugehörigen n Eigenvektoren linear unabhängig (und damit S invertierbar, folglich A diagonalisierbar).*

Beweis [1], 6.2, 6E □

Fakt 2. *Hat A mehrfache (engl.* repeated*) Eigenwerte, dann kann A n linear unabhängige Eigenwerte haben oder auch nicht.*

Beispiel 1. *I hat n-fachen Eigenwert 1 und jeder Vektor $\neq 0$ ist Eigenvektor.*

Beispiel 2. *$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ hat doppelten Eigenwert 2 und nur einen linear unabhängigen Eigenvektor ("geometrische Vielfachheit" 1, "algebraische Vielfachheit" 2).*

Differenzengleichung $u_{k+1} = Au_k$

Gegeben: Anfangswert u_0, Matrix A und die Rekursion $u_{k+1} = Au_k$.

Schreibe u_0 als Linearkombination der Eigenvektoren: $u_0 = Sc$.

Nun ist

$$\begin{aligned} u_k &= A^k u_0 \\ &= S\Lambda^k S^{-1} Sc \\ &= S\Lambda^k c \\ &= c_1\lambda_1^k x_1 + \ldots + c_n\lambda_n^k x_n. \end{aligned}$$

Beispiel 3. [Fibonacci]

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_{k+2} = F_{k+1} + F_k \quad \textit{(2.Ordnung!)}.$$

Mit einem schönen Trick wird daraus ein System 1. Ordnung:

$$\boldsymbol{u}_0 = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_{k+1} = \begin{bmatrix} F_{k+2} \\ F_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{bmatrix}$$

$A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ *hat Eigenwerte* $\lambda_1 = (1+\sqrt{5})/2$ *und* $\lambda_2 = (1-\sqrt{5})/2$ *mit zugehörigen Eigenvektoren* $\boldsymbol{x}_1 = \left[\begin{smallmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$ *und* $\boldsymbol{x}_2 = \left[\begin{smallmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$. *Es ist* $\lambda_1 > 1$ *und* $|\lambda_2| < 1$.

$$\boldsymbol{u}_0 = \tfrac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{bmatrix} - \tfrac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\begin{bmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_k = \tfrac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\lambda_1^k\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{bmatrix} - \tfrac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\lambda_2^k\begin{bmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{bmatrix} \approx \tfrac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\lambda_1^k\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Literatur

[1] Gilbert Strang. *Introduction to Linear Algebra*. Wellesley-Cambridge Press, third edition, 2003.