

# Eigenwerte und Eigenvektoren

nach G.Strang, MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra, Lecture 21

M. Gruber

10.12.2009

## Zusammenfassung

Eigenvektoren, Eigenwerte.

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

$$\text{trace } A = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n.$$

$$\det A = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n.$$

M.Gruber, WS 2009/2010

Lineare Algebra

## Eigenvektoren und Eigenwerte

**Definition.**  $x \neq 0$  ist Eigenvektor der (quadratischen) Matrix  $A$ , wenn  $x$  und  $Ax$  parallel sind:

$$Ax = \lambda x \quad \text{für ein } \lambda$$

$\lambda$  heißt Eigenwert,  $x$  Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda$ .

**Fakt 1.**

*Summe der Eigenwerte = Summe der Diagonalelemente.*

**Fakt 2.**

*Produkt der Eigenwerte = Determinante.*

## Beispiele

### Beispiel 1. [Singuläre Matrix]

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

### Beispiel 2. [Projektor]

$$\frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2

## Beispiele

### Beispiel 3. [Permutation]

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

### Beispiel 4. [Rotation]

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} = (-i) \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$i$  ist die "imaginäre Zahl" mit der Eigenschaft  $i^2 = -1$ .

3

## Wie findet man Eigenwerte?

- $Ax = \lambda x$  mit den Unbekannten  $\lambda$  und  $x \neq 0$ .
- Bringe  $\lambda x$  auf die linke Seite:  $(A - \lambda I)x = 0$  mit  $x \neq 0$ .
- M.a.W.:  $A - \lambda I$  ist singulär.
- M.a.W.:  $\det(A - \lambda I) = 0$ .
- Idee:
  1. Finde zuerst  $\lambda$  mit  $\det(A - \lambda I) = 0$ .
  2. Finde zu jedem  $\lambda$  einen Eigenvektor.

4

## Beispiele

**Beispiel 5.** Gegeben sei  $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ .

- Eigenwerte sind Lösung(en) der "charakteristische Gleichung"  $\begin{vmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0$ .

$0 = \lambda^2 - 6\lambda + 8$  hat die Lösungen  $\lambda_1 = 2$  und  $\lambda_2 = 4$ .

- Eigenvektoren zu den Eigenwerten sind Lösungen homogener Gleichungssysteme:

$$\text{Eigenvektor zu } \lambda_1 = 2 : \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0; \quad \text{zu } \lambda_2 = 4 : \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0.$$

5

## Beispiele

**Beispiel 6.** Gegeben sei  $A = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

- $A$  hat doppelten Eigenwert:  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ .
- Jeder Vektor  $\neq 0$  des  $\mathbf{R}^2$  ist Eigenvektor zum Eigenwert 1. Wähle zwei linear unabhängige, z.B.  $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  und  $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

**Beispiel 7.** Addition von  $\mu I$  zu einer Matrix verschiebt ihre Eigenwerte um  $\mu$ .<sup>1</sup>

- $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  hat Eigenwerte 1 und  $-1$ .
- $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 3I$ .
- $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$  hat Eigenwerte 4 und 2.

---

<sup>1</sup>Die zugehörigen Eigenvektoren bleiben gleich.

## Beispiele

**Beispiel 8. [entartete Matrix]** Sei  $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ .

- Suche Eigenwerte von  $A - 3I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ .
- Die charakteristische Gleichung  $\lambda^2 = 0$  hat die doppelte Nullstelle  $\lambda = 0$ .
- $N(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix})$  hat Basis  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ .
- Es gibt keinen weiteren linear unabhängigen Eigenvektor ("entartete" Matrix).