Eigenwerte und Eigenvektoren

nach G.Strang, MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra, Lecture 21

M. Gruber

10.12.2009

Zusammenfassung

Eigenvektoren, Eigenwerte.

$\det(A - \lambda I) = 0$.

$\operatorname{trace} A = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$.

$\det A = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$.

Eigenvektoren und Eigenwerte

Definition. $x \neq 0$ *ist Eigenvektor der (quadratischen) Matrix* A, *wenn* x *und* Ax *parallel sind:*

$$Ax = \lambda x \quad \textit{für ein } \lambda$$

λ *heißt Eigenwert,* x *Eigenvektor zum Eigenwert* λ.

Fakt 1.

Summe der Eigenwerte = Summe der Diagonalelemente.

Fakt 2.

Produkt der Eigenwerte = Determinante.

Beispiele

Beispiel 1. [Singuläre Matrix]

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Beispiel 2. [Projektor]

$$\frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Beispiele

Beispiel 3. [Permutation]

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Beispiel 4. [Rotation]

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} = (-i) \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}.$$

i *ist die "imaginäre Zahl" mit der Eigenschaft* $i^2 = -1$.

Wie findet man Eigenwerte?

- $Ax = \lambda x$ mit den Unbekannten λ und $x \neq 0$.
- Bringe λx auf die linke Seite: $(A - \lambda I)x = 0$ mit $x \neq 0$.
- M.a.W.: $A - \lambda I$ ist singulär.
- M.a.W.: $\det(A - \lambda I) = 0$.
- Idee:
  1. Finde zuerst λ mit $\det(A - \lambda I) = 0$.
  2. Finde zu jedem λ einen Eigenvektor.

Beispiele

Beispiel 5. *Gegeben sei* $A = \left[\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right]$.

- *Eigenwerte sind Lösung(en) der "charakteristische Gleichung"* $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$.

$$0 = \lambda^2 - 6\lambda + 8 \textit{ hat die Lösungen } \lambda_1 = 2 \textit{ und } \lambda_2 = 4.$$

- *Eigenvektoren zu den Eigenwerten sind Lösungen homogener Gleichungssysteme:*

$$\textit{Eigenvektor zu } \lambda_1 = 2: \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0; \quad \textit{zu } \lambda_2 = 4: \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Beispiele

Beispiel 6. *Gegeben sei* $A = I = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$.

- A *hat doppelten Eigenwert:* $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.
- *Jeder Vektor* $\neq 0$ *des* $\mathbf{R}^2$ *ist Eigenvektor zum Eigenwert* 1. *Wähle zwei linear unabhängige, z.B.* $\boldsymbol{v}_1 = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$ *und* $\boldsymbol{v}_2 = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$.

Beispiel 7. *Addition von* μI *zu einer Matrix verschiebt ihre Eigenwerte um* μ. [1]

- $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ *hat Eigenwerte* 1 *und* -1.
- $\left[\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right] + 3I$.
- $\left[\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right]$ *hat Eigenwerte* 4 *und* 2.

[1] Die zugehörigen Eigenvektoren bleiben gleich.

Beispiele

Beispiel 8. [entartete Matrix] *Sei* $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

- *Suche Eigenwerte von* $A - 3I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

- *Die charakteristische Gleichung* $\lambda^2 = 0$ *hat die doppelte Nullstelle* $\lambda = 0$.

- $N(\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right])$ *hat Basis* $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$.

- *Es gibt keinen weiteren linear unabhängigen Eigenvektor ("entartete" Matrix).*