

Inverse Matrizen; Cramer-Regel; Volumen

nach G.Strang, MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra, Lecture 20

M. Gruber

08.12.2009

Zusammenfassung

Formel für A^{-1} .

Cramer-Regel für $x = A^{-1}b$.

Volumen einer Matrix.

M.Gruber, WS 2009/2010

Lineare Algebra

Formel für A^{-1}

1. Wir kennen einen Algorithmus zur Berechnung von A^{-1} , aber keine Formel. . .

2. . . . außer:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Rechts: (1/Determinante) \times Matrix mit Cofaktoren.

3. Sei C die Matrix der Cofaktoren $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A \text{ ohne Zeile } i \text{ und Spalte } j)$;
es gilt

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} C^T}$$

Beweis Wir prüfen nach, ob $AC^T = (\det A)I$ gilt.

1. Diagonalelemente: Das i -te Diagonalelement von AC^T hat den Wert

$$a_{i1}C_{i1} + \dots + a_{in}C_{in} = \det A.$$

2. Nichtdiagonalelemente: Das Element der i -ten Zeile, j -ten Spalte ($i \neq j$) von AC^T hat den Wert

$$a_{i1}C_{j1} + \dots + a_{in}C_{jn} = \det \begin{pmatrix} \text{Matrix } A, \text{ bei der die} \\ j\text{-te Zeile ersetzt wurde} \\ \text{durch deren } i\text{-te Zeile} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \text{Matrix mit zwei} \\ \text{gleichen Zeilen} \end{pmatrix} = 0.$$

□

2

Cramer-Regel für $x = A^{-1}b$

1. Anwendung der Formel für $A^{-1} = \frac{1}{\det A}C^T$:

$$x = \frac{1}{\det A}C^T b$$

2. Für die komponentenweise Berechnung von x heißt dies:

$$x_i = \frac{1}{\det A}(b_1C_{1i} + \dots + b_nC_{ni}) = \det \begin{pmatrix} \text{Matrix } A, \text{ bei der die} \\ i\text{-te Spalte durch } b \\ \text{ersetzt wurde.} \end{pmatrix}$$

3

Volumen

1. $|\det A|$ ist das Volumen des Parallelepipeds P , das durch die Spalten von A beschrieben wird (gemeint ist $P = \{t_1 a_1 + \dots + t_n a_n \mid t_1, \dots, t_n \in [0, 1]\}$).

(Konsequenz von $\det I = 1$ und der spaltenweisen Linearität der Determinante.)

2. Analoges gilt für Zeilen.

3. $n = 2$: Seien $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ die Ecken eines ebenen Dreiecks D .

$$\text{Fläche von } D = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_2 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \right|. \quad (1)$$

¹Die äußeren Striche sind Betragsstriche.