Inverse Matrizen; Cramer-Regel; Volumen

nach G.Strang, MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra, Lecture 20

M. Gruber

08.12.2009

Zusammenfassung

Formel für A^{-1}.

Cramer-Regel für $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$.

Volumen einer Matrix.

Formel für A^{-1}

1. Wir kennen einen Algorithmus zur Berechnung von A^{-1}, aber keine Formel. . .

2. . . . außer:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Rechts: (1/Determinante) $\times$ Matrix mit Cofaktoren.

3. Sei C die Matrix der Cofaktoren $C_{ij} = (-1)^{i+j}\,\mathrm{det}(A$ ohne Zeile i und Spalte $j)$; es gilt

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A}C^T}$$

Beweis Wir prüfen nach, ob $AC^T = (\det A)I$ gilt.

1. Diagonalelemente: Das i-te Diagonalelement von AC^T hat den Wert

$$a_{i1}C_{i1} + \ldots + a_{in}C_{in} = \det A.$$

2. Nichtdiagonalelemente: Das Element der i-ten Zeile, j-ten Spalte ($i \neq$j) von AC^T hat den Wert

$$a_{i1}C_{j1} + \ldots + a_{in}C_{jn} = \det \begin{pmatrix} \text{Matrix } A\text{, bei der die} \\ j\text{-te Zeile ersetzt wurde} \\ \text{durch deren } i\text{-te Zeile} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \text{Matrix mit zwei} \\ \text{gleichen Zeilen} \end{pmatrix} = 0.$$

□

Cramer-Regel für $x = A^{-1}b$

1. Anwendung der Formel für $A^{-1} = \frac{1}{\det A} C^T$:

$$\boxed{x = \frac{1}{\det A} C^T b}$$

2. Für die komponentenweise Berechung von x heißt dies:

$$x_i = \frac{1}{\det A}(b_1 C_{1i} + \ldots + b_n C_{ni}) = \det \begin{pmatrix} \text{Matrix } A\text{, bei der die} \\ i\text{-te Spalte durch } b \\ \text{ersetzt wurde.} \end{pmatrix}$$

Volumen

1. $|\det A|$ ist das Volumen des Parallelepipeds P, das durch die Spalten von A beschrieben wird (gemeint ist $P = \{t_1 a_1 + \ldots + t_n a_n \mid t_1, \ldots, t_n \in [0,1]\}$).

   (Konsequenz von $\det I = 1$ und der spaltenweisen Linearität der Determinante.)

2. Analoges gilt für Zeilen.

3. $n = 2$: Seien $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ die Ecken eines ebenen Dreiecks D.

$$\text{Fläche von } D = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_2 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \right| . \quad (^1)$$

[1] Die äußeren Striche sind Betragsstriche.