Determinanten (Formeln)

nach G.Strang, MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra, Lecture 19

M. Gruber

03.12.2009

Zusammenfassung

Formel für $\det A$ (“big formula”).

Cofaktorformel.

Beispiel: Determinante von Tridiagonalmatrizen.

Beispiel. [Cofaktorformel]

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & a_{21} & a_{23} \\ 0 & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{13} & 0 & 0 \\ 0 & a_{21} & a_{22} \\ 0 & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Cofaktorformel (Laplacescher Entwicklungssatz)

Sei $i \in \{1, \ldots, n\}$ fest.

Entwicklung der Determinante nach der i-ten Zeile

Sei C_{ij} das $(-1)^{i+j}$-Fache der Determinante jener $(n-1) \times (n-1)$-Matrix, die man aus A durch Streichung von Zeile i und Spalte j erhält ("Streichungsmatrix").

$$\det A = \sum_{1 \leq j \leq n} a_{ij} C_{ij}.$$

Beispiel. [Tridiagonalmatrizen]

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \ldots$$

$$|A_1| = 1, \quad |A_2| = 0, \quad , |A_3| = |A_2| - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = |A_2| - |A_1| = -1,$$

$$|A_4| = |A_3| - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = |A_3| - |A_2| = -1, \quad |A_5| = |A_4| - |A_3| = 0, \quad |A_6| = |A_5| - |A_4| = 1, \ldots$$

Leibnizformel

"big formula"

Sei Π die Menge der Permutationen von $\{1,\ldots,n\}$.

Für jedes $\pi\in\Pi$ sei $\operatorname{sgn}(\pi)=1$, wenn π durch eine gerade Anzahl von Vertauschungen realisiert wird, andernfalls $\operatorname{sgn}(\pi)=-1$.

$$\det A=\sum_{\pi\in\Pi}\operatorname{sgn}(\pi)a_{1,\pi(1)}\ldots a_{n,\pi(n)}.$$

Beispiel.

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{sgn}(\pi_1) = 1, \quad \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{sgn}(\pi_2) = -1.$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & u & a \\ 0 & v & b & 0 \\ w & c & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = abcd - uvwx.$$