Determinanten (Eigenschaften)

nach G.Strang, MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra, Lecture 18

M. Gruber

26.11.2009, Rev.1

Die Determinantenfunktion

$$\text{Determinantenfunktion} : n \times n\text{-Matrizen} \longrightarrow \mathbf{R}.$$

Übliche Notationen:

1.

$$\det A \quad \text{bzw.} \quad \det(A) \quad \text{bzw.} \quad \det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \det \left(\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \right),$$

2.

$$|A| \quad \text{bzw.} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Eigenschaften 1 und 2

Eigenschaft 1 (definitorisch):

$$\boxed{\det I = 1}$$

Eigenschaft 2 (definitorisch):

$$\boxed{\text{Zeilentausch} \;\Rightarrow\; \text{Vorzeichenwechsel}}$$

Beispiel.

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -1, \qquad \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 1,$$

$$|\mathit{Permutationsmatrix}| = \begin{cases} 1 & \text{falls } \#\text{Vertauschungen gerade} \\ -1 & \text{falls } \#\text{Vertauschungen ungerade} \end{cases}.$$

Eigenschaft 3 (Linearität pro Zeile)

(definitorisch)

$$\boxed{\begin{vmatrix} t\cdot \text{Zeile } 1 \\ \text{Zeile } 2 \\ \vdots \\ \text{Zeile } n \end{vmatrix} = t\cdot \begin{vmatrix} \text{Zeile } 1 \\ \text{Zeile } 2 \\ \vdots \\ \text{Zeile } n \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} \text{Zeile } 1 + \text{Zeile } 1' \\ \text{Zeile } 2 \\ \vdots \\ \text{Zeile } n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{Zeile } 1 \\ \text{Zeile } 2 \\ \vdots \\ \text{Zeile } n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{Zeile } 1' \\ \text{Zeile } 2 \\ \vdots \\ \text{Zeile } n \end{vmatrix}}$$

Beispiel.

$$\det(I+I) = \det 2I = 4\det I = 4.$$

(daran sieht man auch, dass im allgemeinen $\det(A+B) \neq \det A + \det B$ *ist.)*

Eigenschaft 4 (Folgerung)

$$\boxed{\text{Zwei Zeilen von } A \text{ stimmen überein} \Rightarrow \det A = 0.}$$

Beweis In A seien zwei Zeilen identisch. Tauscht man diese identischen Zeilen, erhält man A'. Es ist aber $A' = A$ und daher $\det A = \det A'$. Andrerseits ist $\det A' = -\det A$ wegen Eigenschaft 2. Also muss $\det A = 0$ sein. □

Beispiel.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{vmatrix}$$

$$= ac \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + ad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + bc \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + bd \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Eigenschaft 5 (Folgerung)

$$\boxed{\text{Ziehe } t\cdot \text{ Zeile } i \text{ von Zeile } k \neq i \text{ ab} \Rightarrow \det A \text{ ändert sich nicht}}$$

Beweis A' gehe aus A durch Addition von $(-t)\cdot$ Zeile i zu Zeile k hervor. Es ist $|A'| = |A| + (-t) \cdot |A''|$ wobei A'' eine Matrix ist, deren i-te und k-te Zeile übereinstimmen. Wegen $|A''| = 0$ ist $|A'| = |A|$. □

$$\boxed{\text{Bei Elimination ändert sich } \det A \text{ nicht}}$$

Beispiel.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Eigenschaft 6 (Folgerung)

$$\boxed{A \text{ enthält eine Nullzeile} \Rightarrow \det A = 0}$$

Beweis Die Nullzeile ist das 0-Fache einer Nullzeile. Wegen Eigenschaft 3 ist somit $|A| = 0 \cdot |A| = 0$.
□

Beispiel. $\operatorname{rank} A < n \Rightarrow \det A = 0$, *denn Elimination liefert mindestens eine Nullzeile.*

Eigenschaft 7 (Folgerung)

$$\boxed{\begin{vmatrix} d_1 & * & \dots & * \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{vmatrix} = d_1 d_2 \cdots d_n}$$

Beweis Ist der Rang der Matrix $< n$, dann ist mindestens eines der Diagonalelemente 0 und links und rechts vom Gleichheitszeichen steht eine 0.

Ist der Rang der Matrix $= n$, dann sind alle $d_i \neq 0$ und man kann durch Elimination zu einer Diagonalmatrix übergehen, ohne den Wert der Determinante zu ändern. Die Diagonalmatrix hat die Diagonalelemente $d_1, \dots, d_n$. Aus dieser zieht man nun Zeile für Zeile den Faktor d_i heraus und erhält schließlich für die Determinante den Wert $d_1 \cdots d_n \cdot |I| = d_1 \cdots d_n$. □

Eigenschaft 8 (Folgerung)

$$\boxed{A \text{ invertierbar} \Rightarrow \det A \neq 0. \qquad A \text{ singulär} \Rightarrow \det A = 0.}$$

Beweis Direkte Folge von Eigenschaft 7. □

$$\boxed{A \text{ invertierbar} \Leftrightarrow \det A \neq 0.}$$

Eigenschaft 9 (Folgerung)

$$\boxed{\det AB = \det A \det B}$$

Beweis Fall 1: A singulär. Eine geeignete Elimination erzeugt eine Nullzeile in A. Dieselbe Elimination erzeugt eine Nullzeile in AB. Damit ist $\det A = 0$ und $\det AB = 0$.

Fall 2: A invertierbar. Eine geeignete Elimination erzeugt aus A eine Diagonalmatrix D mit Diagonalelementen $d_1, \dots, d_n$ (alle $\neq 0$). Es ist $|A| = |D| = d_1 \cdots d_n$. Dieselbe Elimination führt AB über in DB. Es ist $|DB| = d_1 \cdots d_n |B| = |D||B|$ (mit Eigenschaft 3). Damit ist $|AB| = |DB| = |D||B| = |A||B|$. □

Eigenschaft 10 (Folgerung)

$$\boxed{\det A^T = \det A}$$

Beweis $A = LU \Rightarrow |A| = |L||U|$ (mit Eigenschaft 9).

$A^T = U^T L^T \Rightarrow |A^T| = |U^T||L^T|$ (mit Eigenschaft 9).

Es ist $|L| = |L^T| = 1$ und $|U| = |U^T| =$ Produkt der Diagonalelemente. $\square$

Bemerkung. *Eigenschaft 10 sagt, dass alle Eigenschaften, die bezüglich Spalten formuliert wurden, auch bezüglich Zeilen gelten.*