

# Determinanten (Eigenschaften)

nach G.Strang, MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra, Lecture 18

M. Gruber

26.11.2009, Rev.1

# Die Determinantenfunktion

Determinantenfunktion :  $n \times n$ -Matrizen  $\longrightarrow \mathbf{R}$ .

Übliche Notationen:

1.

$$\det A \quad \text{bzw.} \quad \det(A) \quad \text{bzw.} \quad \det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \det \left( \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \right),$$

2.

$$|A| \quad \text{bzw.} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

## Eigenschaften 1 und 2

Eigenschaft 1 (definitiv):

$$\det I = 1$$

Eigenschaft 2 (definitiv):

Zeilentausch  $\Rightarrow$  Vorzeichenwechsel

**Beispiel.**

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -1, \quad \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 1,$$

$$|\text{Permutationsmatrix}| = \begin{cases} 1 & \text{falls \#Vertauschungen gerade} \\ -1 & \text{falls \#Vertauschungen ungerade} \end{cases} .$$

## Eigenschaft 3 (Linearität pro Zeile)

(definitiv)

$$\begin{array}{|c|} \hline t \cdot \text{Zeile 1} \\ \hline \text{Zeile 2} \\ \hline \vdots \\ \hline \text{Zeile } n \\ \hline \end{array} = t \cdot \begin{array}{|c|} \hline \text{Zeile 1} \\ \hline \text{Zeile 2} \\ \hline \vdots \\ \hline \text{Zeile } n \\ \hline \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{|c|} \hline \text{Zeile 1} + \text{Zeile 1}' \\ \hline \text{Zeile 2} \\ \hline \vdots \\ \hline \text{Zeile } n \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \text{Zeile 1} \\ \hline \text{Zeile 2} \\ \hline \vdots \\ \hline \text{Zeile } n \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \text{Zeile 1}' \\ \hline \text{Zeile 2} \\ \hline \vdots \\ \hline \text{Zeile } n \\ \hline \end{array}$$

**Beispiel.**

$$\det(I + I) = \det 2I = 4 \det I = 4.$$

(daran sieht man auch, dass im allgemeinen  $\det(A + B) \neq \det A + \det B$  ist.)

## Eigenschaft 4 (Folgerung)

Zwei Zeilen von  $A$  stimmen überein  $\Rightarrow \det A = 0$ .

*Beweis* In  $A$  seien zwei Zeilen identisch. Tauscht man diese identischen Zeilen, erhält man  $A'$ . Es ist aber  $A' = A$  und daher  $\det A = \det A'$ . Andererseits ist  $\det A' = -\det A$  wegen Eigenschaft 2. Also muss  $\det A = 0$  sein. □

**Beispiel.**

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{vmatrix} \\ &= ac \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + ad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + bc \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + bd \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = ad - bc. \end{aligned}$$

## Eigenschaft 5 (Folgerung)

Ziehe  $t \cdot$  Zeile  $i$  von Zeile  $k \neq i$  ab  $\Rightarrow \det A$  ändert sich nicht

*Beweis*  $A'$  gehe aus  $A$  durch Addition von  $(-t) \cdot$  Zeile  $i$  zu Zeile  $k$  hervor. Es ist  $|A'| = |A| + (-t) \cdot |A''|$  wobei  $A''$  eine Matrix ist, deren  $i$ -te und  $k$ -te Zeile übereinstimmen. Wegen  $|A''| = 0$  ist  $|A'| = |A|$ . □

Bei Elimination ändert sich  $\det A$  nicht

**Beispiel.**

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

## Eigenschaft 6 (Folgerung)

$$A \text{ enthält eine Nullzeile} \Rightarrow \det A = 0$$

*Beweis* Die Nullzeile ist das 0-Fache einer Nullzeile. Wegen Eigenschaft 3 ist somit  $|A| = 0 \cdot |A| = 0$ .

□

**Beispiel.**  $\text{rank } A < n \Rightarrow \det A = 0$ , denn *Elimination liefert mindestens eine Nullzeile.*

## Eigenschaft 7 (Folgerung)

$$\begin{vmatrix} d_1 & * & \dots & * \\ 0 & d_2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{vmatrix} = d_1 d_2 \cdots d_n$$

*Beweis* Ist der Rang der Matrix  $< n$ , dann ist mindestens eines der Diagonalelemente 0 und links und rechts vom Gleichheitszeichen steht eine 0.

Ist der Rang der Matrix  $= n$ , dann sind alle  $d_i \neq 0$  und man kann durch Elimination zu einer Diagonalmatrix übergehen, ohne den Wert der Determinante zu ändern. Die Diagonalmatrix hat die Diagonalelemente  $d_1, \dots, d_n$ . Aus dieser zieht man nun Zeile für Zeile den Faktor  $d_i$  heraus und erhält schließlich für die Determinante den Wert  $d_1 \cdots d_n \cdot |I| = d_1 \cdots d_n$ .  $\square$

## Eigenschaft 8 (Folgerung)

$$A \text{ invertierbar} \Rightarrow \det A \neq 0. \quad A \text{ singular} \Rightarrow \det A = 0.$$

*Beweis* Direkte Folge von Eigenschaft 7.

□

$$A \text{ invertierbar} \Leftrightarrow \det A \neq 0.$$

## Eigenschaft 9 (Folgerung)

$$\det AB = \det A \det B$$

*Beweis* Fall 1:  $A$  singular. Eine geeignete Elimination erzeugt eine Nullzeile in  $A$ . Dieselbe Elimination erzeugt eine Nullzeile in  $AB$ . Damit ist  $\det A = 0$  und  $\det AB = 0$ .

Fall 2:  $A$  invertierbar. Eine geeignete Elimination erzeugt aus  $A$  eine Diagonalmatrix  $D$  mit Diagonalelementen  $d_1, \dots, d_n$  (alle  $\neq 0$ ). Es ist  $|A| = |D| = d_1 \cdots d_n$ . Dieselbe Elimination führt  $AB$  über in  $DB$ . Es ist  $|DB| = d_1 \cdots d_n |B| = |D||B|$  (mit Eigenschaft 3). Damit ist  $|AB| = |DB| = |D||B| = |A||B|$ . □

## Eigenschaft 10 (Folgerung)

$$\det A^T = \det A$$

*Beweis*  $A = LU \Rightarrow |A| = |L||U|$  (mit Eigenschaft 9).

$A^T = U^T L^T \Rightarrow |A^T| = |U^T||L^T|$  (mit Eigenschaft 9).

Es ist  $|L| = |L^T| = 1$  und  $|U| = |U^T| =$  Produkt der Diagonalelemente. □

**Bemerkung.** *Eigenschaft 10 sagt, dass alle Eigenschaften, die bezüglich Spalten formuliert wurden, auch bezüglich Zeilen gelten.*