

Gram-Schmidt-Orthogonalisierung

nach G.Strang, MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra, Lecture 17

M. Gruber

24.11.2009

Zusammenfassung

Orthonormalbasen und Orthogonalmatrizen.

Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren.

M.Gruber, WS 2009/2010

Lineare Algebra

Orthonormalbasen

Vektoren $q_1, \dots, q_n \subset \mathbf{R}^m$ bilden eine Orthonormalbasis, wenn gilt:

$$q_i q_j = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ 1 & \text{für } i = j \end{cases} .$$

Schreibt man die Vektoren der Orthonormalbasis als Spalten in eine Matrix Q , dann hat Q folgende Eigenschaften:

1. $Q^T Q = I$.
2. Ist $m = n$ (d.h. Q quadratisch), dann ist $Q^T = Q^{-1}$.
3. $Q Q^T \begin{cases} = I & \text{falls } Q \text{ quadratisch ist} \\ \neq I & \text{falls } Q \text{ nicht quadratisch ist} \end{cases}$.
4. Der Projektor auf den Spaltenraum $C(Q)$ ist $P = Q Q^T$ (weil $(Q^T Q)^{-1} = I$ ist).

Normalengleichung für Q

Die Spalten der Matrix Q seien eine Orthonormalbasis und $b \notin C(Q)$.

Dann hat die Normalengleichung $Q^T Q \hat{x} = Q^T b$ (wegen $Q^T Q = I$) die einfache Gestalt

$$\hat{x} = Q^T b,$$

d.h.

$$\hat{x}_i = q_i^T b \quad (i = 1, \dots, n).$$

2

Orthogonalmatrizen

Man nennt $Q = [q_1 \dots q_n]$ eine Orthogonalmatrix, wenn q_1, \dots, q_n eine Orthonormalbasis des \mathbf{R}^n (und Q damit quadratisch) ist.

1. Für eine Orthogonalmatrix gilt $Q^T = Q^{-1}$.

2. Beispiele:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

3

Ein Problem (*à la* Gram-Schmidt)

Sei

$$Q = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Die beiden ersten Spalten von Q bilden die Orthonormalbasis einer Ebene E im R^3 .

Aufgabe Füge eine dritte Spalte zu Q hinzu, so dass eine Orthogonalmatrix entsteht.

Lösung Sei P_E der Projektor auf E . $I - P_E$ ist der Projektor auf $E^\perp = \{v \mid v \perp w \text{ für alle } w \in E\}$.

1. Finde (rate) einen Vektor $c \notin E$.
2. $C := (I - P_E)c$ ist orthogonal zur ersten und zweiten Spalte von Q .
3. Normiere auf Einheitslänge (berechne $C/\|C\|$) und füge $C/\|C\|$ als neue Spalte an Q an.

Lösung mit Mathematica $\rightarrow \dots$ Lösung von Hand $\rightarrow \dots$

4

Lösung mit Mathematica

```
In[1] := q = (1/3){{1, -2}, {2, -1}, {2, 2}};
```

```
In[2] := c = {1, 1, 1} (* geraten *);
```

```
In[3] := cc = (IdentityMatrix[3] - q.Transpose[q]).c;
```

```
In[4] := cc = cc/Norm[cc]
```

```
2 2 1
```

```
Out[4]= {-, -(-), -}
```

```
3 3 3
```

```
In[5] := q = Transpose[Append[Transpose[q], cc]];
```

```
In[6] := Transpose[q].q == IdentityMatrix[3]
```

```
Out[6]= True
```

```
In[7] := q.Transpose[q] == IdentityMatrix[3]
```

```
Out[7]= True
```

5

Lösung von Hand

$$\begin{aligned}
 c &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \\
 C &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} - \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{5}{9} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 2/9 \\ -2/9 \\ 1/9 \end{bmatrix}. \\
 C/\|C\| &= \begin{bmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

6

Gram-Schmidt-Orthogonalisierung

Sei a, b, c die Basis eines Unterraums des \mathbf{R}^m .

“Gram-Schmidt” findet eine Orthonormalbasis für den selben Unterraum:

1. $A \leftarrow a$.

2. $B \leftarrow b - (A^T b / A^T A) A$. $A^T B = A^T b - (A^T b / A^T A) A^T A = 0$.

3. $C \leftarrow c - (A^T c / A^T A) A - (B^T c / B^T B) B$.

$$A^T C = A^T c - (A^T c / A^T A) A^T A - (B^T c / B^T B) A^T B = 0.$$

$$B^T C = B^T c - (A^T c / A^T A) B^T A - (B^T c / B^T B) B^T B = 0.$$

4. $A/\|A\|, B/\|B\|, C/\|C\|$ spannen den selben Unterraum wie a, b, c auf.

7

$$A = QR$$

Sei $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ eine Basis und $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n$ die zugehörige Orthonormalbasis nach Gram-Schmidt. Sei $A = [\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n]$ und $Q = [\mathbf{q}_1 \dots \mathbf{q}_n]$.

$$Q^T A = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{q}_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^T \mathbf{a}_1 & \mathbf{q}_1^T \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{q}_1^T \mathbf{a}_n \\ \mathbf{q}_2^T \mathbf{a}_1 & \mathbf{q}_2^T \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{q}_2^T \mathbf{a}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{q}_n^T \mathbf{a}_1 & \mathbf{q}_n^T \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{q}_n^T \mathbf{a}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^T \mathbf{a}_1 & \mathbf{q}_1^T \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{q}_1^T \mathbf{a}_n \\ 0 & \mathbf{q}_2^T \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{q}_2^T \mathbf{a}_n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \mathbf{q}_n^T \mathbf{a}_n \end{bmatrix} =: R.$$

Multiplikation von links mit Q auf beiden Seiten liefert

$$\boxed{A = QR}$$