Gram-Schmidt-Orthogonalisierung

nach G.Strang, MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra, Lecture 17

M. Gruber

24.11.2009

Zusammenfassung

Orthonormalbasen und Orthogonalmatrizen.

Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren.

Orthonormalbasen

Vektoren $q_1, \ldots, q_n \subset \mathbf{R}^m$ bilden eine Orthonormalbasis, wenn gilt:

$$q_i q_j = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad i \neq j \\ 1 & \text{für} \quad i = j \end{cases} .$$

Schreibt man die Vektoren der Orthonormalbasis als Spalten in eine Matrix Q, dann hat Q folgende Eigenschaften:

1. $Q^T Q = I$.
2. Ist $m = n$ (d.h. Q quadratisch), dann ist $Q^T = Q^{-1}$.
3. $QQ^T \quad \begin{cases} = I & \text{falls } Q \text{ quadratisch ist} \\ \neq I & \text{falls } Q \text{ nicht quadratisch ist} \end{cases} .$
4. Der Projektor auf den Spaltenraum $C(Q)$ ist $P = QQ^T$ (weil $(Q^T Q)^{-1} = I$ ist).

Normalengleichung für Q

Die Spalten der Matrix Q seien eine Orthonormalbasis und $b \notin C(Q)$.

Dann hat die Normalengleichung $Q^T Q\hat{x} = Q^T b$ (wegen $Q^T Q = I$) die einfache Gestalt

$$\hat{x} = Q^T b,$$

d.h.

$$\hat{x}_i = q_i^T b \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Orthogonalmatrizen

Man nennt $Q = [\, q_1 \cdots q_n \,]$ eine Orthogonalmatrix, wenn $q_1, \ldots, q_n$ eine Orthonormalbasis des $\mathbf{R}^n$ (und Q damit quadratisch) ist.

1. Für eine Orthogonalmatrix gilt $Q^T = Q^{-1}$.

2. Beispiele:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ein Problem (*à la* Gram-Schmidt)

Sei

$$Q = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Die beiden ersten Spalten von Q bilden die Orthonormalbasis einer Ebene E im R^3.

Aufgabe Füge eine dritte Spalte zu Q hinzu, so dass eine Orthogonalmatrix entsteht.

Lösung Sei P_E der Projektor auf E. $I - P_E$ ist der Projektor auf $E^\perp = \{v \mid v \perp w$ für alle $w \in E\}$.

1. Finde (rate) einen Vektor $c \notin E$.
2. $C := (I - P_E)c$ ist orthogonal zur ersten und zweiten Spalte von Q.
3. Normiere auf Einheitslänge (berechne $C/||C||$) und füge $C/||C||$ als neue Spalte an Q an.

Lösung mit Mathematica $\rightarrow \ldots$ Lösung von Hand $\rightarrow \ldots$

Lösung mit Mathematica

```
In[1]:= q = (1/3){{1, -2}, {2, -1}, {2, 2}};

In[2]:= c = {1, 1, 1} (* geraten *);

In[3]:= cc = (IdentityMatrix[3] - q.Transpose[q]).c;

In[4]:= cc = cc/Norm[cc]

          2    2   1
Out[4]= {-, -(-), -}
          3    3   3

In[5]:= q = Transpose[Append[Transpose[q], cc]];

In[6]:= Transpose[q].q == IdentityMatrix[3]

Out[6]= True

In[7]:= q.Transpose[q] == IdentityMatrix[3]

Out[7]= True
```

Lösung von Hand

$$c = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$C = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} - \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{5}{9} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2/9 \\ -2/9 \\ 1/9 \end{bmatrix}.$$

$$C/||C|| = \begin{bmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}.$$

Gram-Schmidt-Orthogonalisierung

Sei a, b, c die Basis eines Unterraums des $\mathbf{R}^m$.

"Gram-Schmidt" findet eine Orthonormalbasis für den selben Unterraum:

1. $A \leftarrow a$.

2. $B \leftarrow b - (A^T b / A^T A) A$.

$$A^T B = A^T b - (A^T b / A^T A) A^T A = 0.$$

3. $C \leftarrow c - (A^T c / A^T A) A - (B^T c / B^T B) B$.

$$A^T C = A^T c - (A^T c / A^T A) A^T A - (B^T c / B^T B) A^T B = 0.$$

$$B^T C = B^T c - (A^T c / A^T A) B^T A - (B^T c / B^T B) B^T B = 0.$$

4. $A/||A||, B/||B||, C/||C||$ spannen den selben Unterraum wie a, b, c auf.

$A = QR$

Sei $a_1, \ldots, a_n$ eine Basis und $q_1, \ldots, q_n$ die zugehörige Orthonormalbasis nach Gram-Schmidt. Sei $A = \left[\, a_1 \cdots a_n \,\right]$ und $Q = \left[\, q_1 \cdots q_n \,\right]$.

$$Q^T A = \begin{bmatrix} q_1^T \\ \vdots \\ q_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & \ldots & a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1^T a_1 & q_1^T a_2 & \ldots & q_1^T a_n \\ q_2^T a_1 & q_2^T a_2 & \ldots & q_2^T a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_n^T a_1 & q_n^T a_2 & \ldots & q_n^T a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1^T a_1 & q_1^T a_2 & \ldots & q_1^T a_n \\ 0 & q_2^T a_2 & \ldots & q_2^T a_n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & q_n^T a_n \end{bmatrix} =: R.$$

Multiplikation von links mit Q auf beiden Seiten liefert

$$\boxed{A = QR}$$