Die Methode der kleinsten Quadrate

nach G.Strang, MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra, Lecture 16

M. Gruber

19.11.2009

Beispiel. [aus *lecture 16*] *Gegeben sind drei Messwerte für* (t, b): $(1,1),(2,2),(3,2)$.

Welche Gerade $b = C + Dt$ *fittet diese Werte möglichst gut?*

Lägen die Punkte tatsächlich auf einer Geraden, könnte man C, D *bestimmen aus*

$$\begin{bmatrix} C+D \\ C+2D \\ C+3D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Aber die Punkte liegen nicht auf einer Geraden.

Die rechte Seite b *liegt nicht im Spaltenraum der Systemmatrix* A.

Die bestmögliche Lösung ist: Projiziere b *auf den Spaltenraum von* A *(das können wir jetzt).*

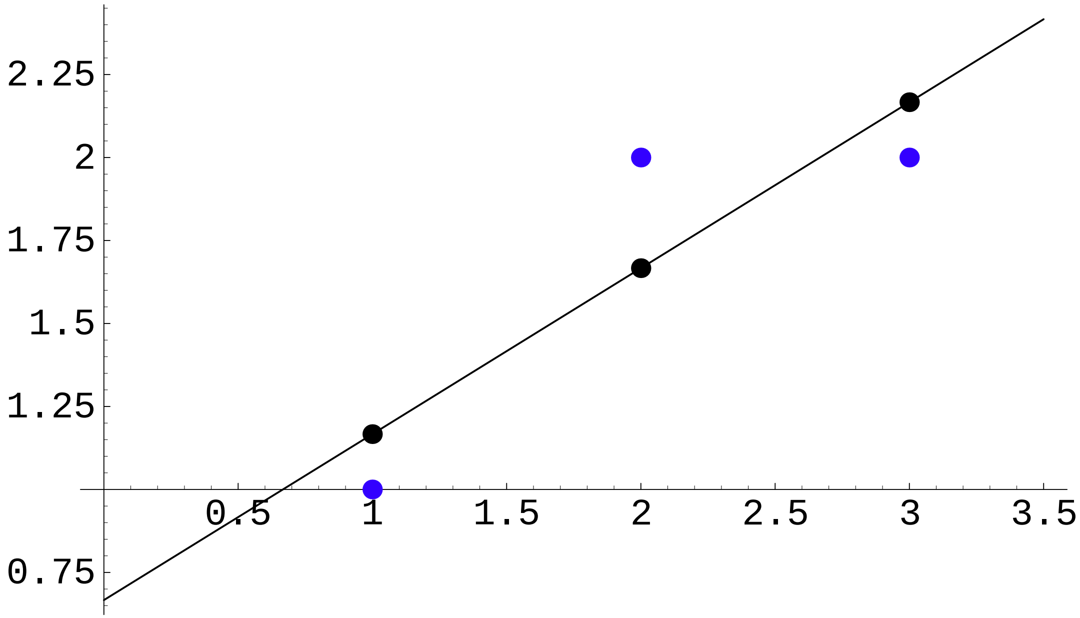
Das Projektionsbild ist ein $p \in C(A)$. *Mit diesem* p *lösen wir* $A\hat{x} = p$. $\boxed{C = \hat{x}_1, D = \hat{x}_2}$.

Beispiel. [Fortsetzung]

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}, \qquad A^Tb = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

1. *Elimination:*
$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 5 \\ 6 & 14 & 11 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 3 & 6 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$
2. *Rücksubstitution:* $\hat{x}_2 = D = 1/2, \hat{x}_1 = C = 2/3$.
3. $Pb = p = A\hat{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/6 \\ 5/3 \\ 13/6 \end{bmatrix}$, error vector $e = b - p = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7/6 \\ 5/3 \\ 13/6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/6 \\ 1/3 \\ -1/6 \end{bmatrix}$.

Beispiel. [Fortsetzung]



Die Messwerte $\boldsymbol{b}$ *(blau), deren Projektion* $\boldsymbol{P}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{p}$ *(schwarz) und die Ausgleichsgerade* $\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\boldsymbol{t}$.

Die kleinsten Quadrate

1. $Ax = b$ mit $b \notin C(A)$ ist unlösbar, aber $A^T A\hat{x} = A^T b$ ist lösbar.
2. Der Fehler ist $e = b - p = b - A\hat{x}$.
3. Die Summe der Fehlerquadrate $e_1^2 + \ldots + e_n^2$ (also $||e||^2$) ist minimal.
   (a) algebraische Begründung: $e \perp C(A)$.
   (b) analytische Begründung (für unser Beispiel):

$$F(C,D) := \left\| \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\|^2 = (C + D - 1)^2 + (C + 2D - 2)^2 + (C + 3D - 2)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial C} F(C,D) = 6C + 12D - 10 = 0, \ \frac{\partial}{\partial D} F(C,D) = 12C + 28D - 22 = 0 \Rightarrow D = 1/2, C = 2/3.$$