Projektionen auf Unterräume

nach G.Strang, MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra, Lecture 15

M. Gruber

17.11.2009, Rev.1

Zusammenfassung

Die Projektion auf eine Gerade und ihre Darstellung als Matrix (Projektionsmatrix).

Die Projektion auf eine Ebene und ihre Darstellung als Matrix (Projektionsmatrix).

Projektionen wozu?

Beispiel. *Gegeben sind drei Messwerte für* (t, b): $(1, 1), (2, 2), (3, 2)$.

Welche Gerade $b = C + Dt$ *fittet diese Werte möglichst gut?*

Lägen die Punkte tatsächlich auf einer Geraden, könnte man C, D *bestimmen aus*

$$\begin{bmatrix} C + D \\ C + 2D \\ C + 3D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Aber die Punkte liegen nicht auf einer Geraden.

Die rechte Seite b *liegt nicht im Spaltenraum der Systemmatrix* A.

Die bestmögliche Lösung ist: Projiziere b *auf den Spaltenraum von* A *(wie, das lernen wir heute).*

Das Projektionsbild ist ein $p \in C(A)$. *Mit diesem* p *löse* $A\hat{x} = p$ *(nächste Lektion).*

Projektion auf eine Gerade

Sei $a \in \mathbf{R}^2, a \neq 0$ und $b \in \mathbf{R}^2$. Sei G die Gerade $\{ta \mid t \in \mathbf{R}\}$.

1. Die Projektion von b auf G ist ein $p \in G$ mit minimalem *error vector* $e = b - p$.

2. Die Länge $||e||$ des *error vectors* e ist minimal, wenn $e \perp a$ ist.

3. Das Projektionsbild p ist ein Vielfaches von a: $p = xa$ mit $x \in \mathbf{R}$.

4. x kann man aus der Bedingung $a^T e = 0$ berechnen:

$$a^T e = a^T(b - xa) = 0 \Rightarrow a^T b = xa^T a \Rightarrow x = a^T b / a^T a.$$

5. Projektion auf die Gerade G: $b \mapsto xa = (a^T b / a^T a)a$ (eine lineare Abbildung).

Die Projektionsmatrix der Projektion auf eine Gerade

1. Statt $p = xa$ schreibe $p = ax$ (das geht auch!).

2. Nun liest sich die Projektion auf die Gerade G so:

$$b \mapsto ax = aa^T b / a^T a = (aa^T / a^T a)b.$$

3. $P = aa^T / a^T a$ ist eine Matrix (eine Projektionsmatrix); es ist $\operatorname{rank} P = 1$.

4. P ist symmetrisch: $P^T = P$.

5. $P^2 = P$, denn $P^2 = aa^T aa^T / (a^T a)^2 = aa^T / a^T$.

Projektion auf einen höherdimensionalen Unterraum

Sei U ein Unterraum des R^m und $a_1, \ldots, a_n$ eine Basis von U. Sei $b \in \mathbf{R}^m$.

1. Schreibe die a_i's in eine $m \times n$-Matrix: $A = \begin{bmatrix} a_1 & \ldots & a_n \end{bmatrix}$.

2. Sei p das Projektionsbild von b auf $C(A)$: $p = A\hat{x}$ mit geeignetem $\hat{x}$.

3. $(b - p) \perp C(A) \Rightarrow A^T(b - p) = 0 \Rightarrow A^T(b - A\hat{x}) = 0 \Rightarrow \boxed{A^T A\hat{x} = A^T b}$.

4. Auflösen nach $\hat{x}$: $\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b$. ($A^T A$ ist tatsächlich invertierbar!)

5. $p = A\hat{x} = A(A^T A)^{-1} A^T b$. Die Projektionsmatrix ist $P = A(A^T A)^{-1} A^T$.

Die Projektionsmatrix $P = A(A^T A)^{-1} A^T$

1. Warum nicht einfach $P = A(A^T A)^{-1} A^T = AA^{-1}(A^T)^{-1} A^T = I$?

2. P ist symmetrisch: $P^T = (A(A^T A)^{-1} A^T)^T = A((A^T A)^T)^{-1} A^T = P$.

3. $P^2 = A(A^T A)^{-1} A^T A(A^T A)^{-1} A^T = A(A^T A)^{-1} A^T = P$.

4. Wenn $b \in C(A)$ ist, ist $b = Ax$ und $Pb = A(A^T A)^{-1} A^T Ax = Ax = b$.

5. Wenn $b \perp C(A)$ ist, ist $b \in N(A^T)$ und $Pb = A(A^T A)^{-1} A^T b = 0$.

6. Auch $I - P$ ist ein Projektor, nämlich der Projektor auf $N(A^T)$.