Orthogonalität

nach G.Strang, MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra, Lecture 14

M. Gruber

12.11.2009, Rev.1

Zusammenfassung

Orthogonalität von Vektoren.

Orthogonalität von Unterräumen.

Nullraum und Zeilenraum sind orthogonal.

Spaltenraum und linker Nullraum sind orthogonal.

$\operatorname{rank} A^T A$.

Pythagoras und die Orthogonalität von Vektoren

Seien $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n$.

1. Euklidische Länge: $||\boldsymbol{x}|| = \sqrt{\boldsymbol{x}_1^2 + \boldsymbol{x}_2^2 + \cdots + \boldsymbol{x}_n^2}$. (Pythagoras)

2. Zusammenhang mit Matrixprodukt: $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x} = ||\boldsymbol{x}||^2$.

3. Sind $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks (mit rechtem Winkel zwischen $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$), dann muss gelten (Pythagoras): $||\boldsymbol{x}||^2 + ||\boldsymbol{y}||^2 = ||\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}||^2$.

4. Pythagoras, geschrieben mit Matrixprodukten: $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})^T(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})$.

   Wegen $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})^T(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{y}$ sind $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ also genau dann orthogonal, wenn $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y} = 0$ ist. Wir schreiben dann $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$.

Orthogonalität von Unterräumen

Seien S, T Unterräume.

1. S und T sind orthogonal ($S \perp T$), wenn jedes $v \in S$ zu jedem $w \in T$ orthogonal ist. (Die (x, y)-Ebene und die (y, z)-Ebene sind nicht orthogonal. Warum nicht?)

2. $C(A^T) \perp N(A)$, denn $v \in C(A^T) \wedge w \in N(A) \Rightarrow v = A^T y \wedge Aw = 0 \Rightarrow v^T w = (A^T y)^T w = y^T (Aw) = 0$.

3. $C(A) \perp N(A^T)$ (folgt aus 2. mit A^T anstelle von A).

4. $C(A^T)$ u. $N(A)$ sind orthogonale Komplemente: $\dim C(A^T) + \dim N(A) = n$.

5. $C(A)$ u. $N(A^T)$ sind orthogonale Komplemente: $\dim C(A) + \dim N(A^T) = m$.

$A^T A$

Satz. $N(A^T A) = N(A)$

Beweis

1. $x \in N(A) \Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow A^T Ax = 0 \Rightarrow x \in N(A^T A)$.
2. $x \in N(A^T A) \Rightarrow A^T Ax = 0 \Rightarrow x^T A^T Ax = 0 \Rightarrow ||Ax|| = 0 \Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow x \in N(A)$.

$\square$

Satz. *Ist A eine $m \times n$-Matrix mit $m > n$ und $\operatorname{rank} A = n$, so ist $A^T A$ invertierbar.*

Beweis $A^T A$ ist eine $n \times n$-Matrix mit $\operatorname{rank} A = n$, weil $N(A^T A) = N(A) = Z$ ist. $\square$

Ausblick: Sei $\operatorname{rank} A = n$ und das Problem $Ax = b$ unlösbar. Das Ersatzproblem $A^T A\hat{x} = A^T b$ ist lösbar. Seine Lösung $\hat{x}$ löst $Ax = b$ "so gut wie möglich".