Graphen und Netzwerke

nach G.Strang, MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra, Lecture 12

M. Gruber

10.11.2009

Zusammenfassung

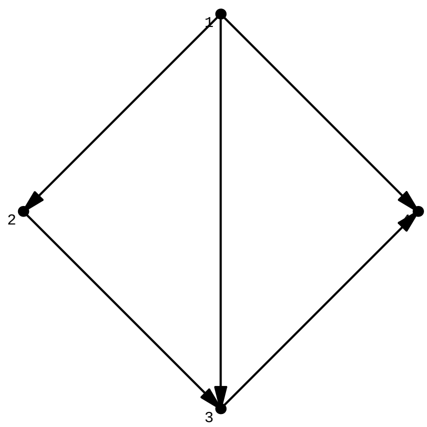
Inzidenzmatrizen.

Euler-Formel.

Ohmsches Gesetz.

Kirchhoff-Regeln: Maschenregel, Knotenregel.

Inzidenzmatrizen



Ein zusammenhängender, planarer, gerichteter Graph mit vier Knoten, fünf gerichteten Kanten, zwei kleinen Zyklen (eingeschlossenen Gebieten, Maschen).

Eine zugehörige Inzidenzmatrix (eine Spalte pro Knoten, eine Zeile pro Kante):

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$m = \#$ Kanten, $n = \#$ Knoten.

Elimination findet Zyklen und bricht sie auf

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

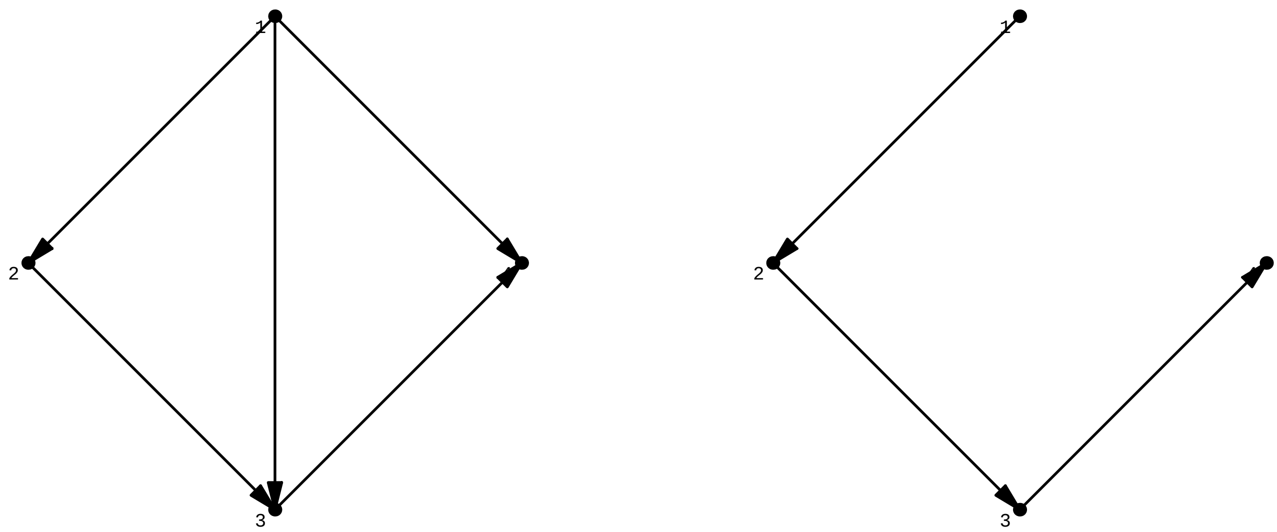
1. Linear abhängige Zeilen stellen Zyklen (Umläufe, *loops*) dar.

2. $r = \operatorname{rank} A = \#$ Knoten $- 1$.

3. **Euler**: $\#$ kleine Zyklen $= m - r = \#$ Kanten $- (\#$ Knoten $- 1) \Rightarrow$

$$\boxed{\#\text{ kleine Zyklen-}\#\text{ Kanten+}\#\text{ Knoten=1}}\,.$$

Elimination erzeugt einen Spannbaum



Links: Graph zu A; rechts: Graph zu U.

Elektrisches Netzwerk: in Ax stehen Potentialdifferenzen

$$Ax = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ x_3 - x_1 \\ x_4 - x_1 \\ x_3 - x_2 \\ x_4 - x_3 \end{bmatrix}; \qquad \text{Basis von } N(A) \text{ ist } \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{(konstantes Potential).}$$

1. Lösbarkeitsbedingung für $Ax = b$ erscheint hier als **Maschenregel (2. Kirchhoffsches Gesetz)**: *Alle Teilspannungen eines Umlaufs bzw. einer Masche in einem elektrischen Netzwerk addieren sich zu Null.*

2. Wenn z.B. Knoten 4 geerdet ist, setze $x_4 = 0$.

3. **Ohm**: $y = -CAx$. Ströme y, Kapazitäten $C = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_5 \end{bmatrix}$.

Elektr. Netzwerk: $A^T y = 0$ ist 1.Kirchhoffsches Gesetz

Knotenregel: *In einem Knotenpunkt eines elektrischen Netzwerkes ist die Summe der zufließenden Ströme gleich der Summe der abfließenden Ströme.*

$$A^T y = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Summe der Netzströme an Knoten 1} \\ \text{Summe der Netzströme an Knoten 2} \\ \text{Summe der Netzströme an Knoten 3} \\ \text{Summe der Netzströme an Knoten 4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1. Basis von $N(A^T)$ ist $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, die beiden kleinen Zyklen!

2. Die Summe der Basislösungen $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ist der große Zyklus.

Elektr. Netzwerk, externe Stromquelle: $A^T y = f$

Beispiel:

$$A^T y = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Summe der Netzströme an Knoten 1} \\ \text{Summe der Netzströme an Knoten 2} \\ \text{Summe der Netzströme an Knoten 3} \\ \text{Summe der Netzströme an Knoten 4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1. Annahme: $C = I$. Zu lösen: $-A^T A x = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ mit $A^T A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

2. Allgemeine Lösung: $x = \begin{bmatrix} 5/8 \\ 1/2 \\ 3/8 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Somit ist $y = -Ax = \begin{bmatrix} 1/8 \\ 1/4 \\ 5/8 \\ 1/8 \\ 3/8 \end{bmatrix}$.