

Die vier fundamentalen Unterräume

nach G.Strang, MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra, Lecture 10

M. Gruber

05.11.2009

Zusammenfassung

Die Unterräume $C(A)$, $N(A)$, $C(A^T)$, $N(A^T)$.

Wo liegen sie?

Welche Basen und welche Dimension haben sie?

M.Gruber, WS 2009/2010

Lineare Algebra

Die vier fundamentalen Unterräume

Sei A eine $m \times n$ -Matrix mit $\text{rank } A = r$.

Nullraum von A $N(A) \subset \mathbf{R}^n$ $\dim N(A) = n - r$ eine Basis: unsere speziellen Lösungen	Spaltenraum von A $C(A) \subset \mathbf{R}^m$ $\dim C(A) = r$ eine Basis: die Pivot-Spalten
Zeilenraum von A $C(A^T) \subset \mathbf{R}^n$ $\dim C(A^T) = r$ eine Basis: ???	linker Nullraum von A $N(A^T) \subset \mathbf{R}^m$ $\dim N(A^T) = m - r$ eine Basis: ???

Eine Basis für $C(A^T)$

R bezeichne wieder die reduzierte Zeilenstufenform von A .

- Es ist $C(A) \neq C(R), \dots$
- aber es ist $C(R^T) = C(A^T)$! Warum?

Beispiel 1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R$$

Eine Basis von $C(A^T)$ sind die r ersten Zeilen von R .

Eine Basis für $N(A^T)$

Gesucht ist eine Basis von $\{y \in \mathbf{R}^m \mid A^T y = 0\}$ ($= \{y \in \mathbf{R}^m \mid y^T A = 0\}$.)

Beispiel 1. [Fortsetzung]

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_E \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}}_A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_R.$$

Eine Basis für $N(A^T)$ sind die letzten $m - r$ Zeilen der (invertierbaren) Umformungsmatrix E .

Hier: $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ist eine Basis für $N(A^T)$.