Die vier fundamentalen Unterräume

nach G.Strang, MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra, Lecture 10

M. Gruber

05.11.2009

Zusammenfassung

Die Unterräume $C(A), N(A), C(A^T), N(A^T)$.

Wo liegen sie?

Welche Basen und welche Dimension haben sie?

Die vier fundamentalen Unterräume

Sei A eine $m \times n$-Matrix mit $\operatorname{rank} A = r$.

Nullraum von A	Spaltenraum von A
$N(A) \subset \mathbf{R}^n$	$C(A) \subset \mathbf{R}^m$
$\dim N(A) = n - r$	$\dim C(A) = r$
eine Basis: unsere speziellen Lösungen	eine Basis: die Pivot-Spalten
Zeilenraum von A	**linker Nullraum von A**
$C(A^T) \subset \mathbf{R}^n$	$N(A^T) \subset \mathbf{R}^m$
$\dim C(A^T) = r$	$\dim N(A^T) = m - r$
eine Basis: ???	eine Basis: ???

Eine Basis für $C(A^T)$

R bezeichne wieder die reduzierte Zeilenstufenform von A.

- Es ist $C(A) \neq C(R)$,. . .
- aber es ist $C(R^T) = C(A^T)$! Warum?

Beispiel 1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R$$

Eine Basis von $C(A^T)$ sind die r ersten Zeilen von R.

Eine Basis für $N(A^T)$

Gesucht ist eine Basis von $\{y \in \mathbf{R}^m \mid A^T y = 0\}$ $(= \{y \in \mathbf{R}^m \mid y^T A = 0\}.)$

Beispiel 1. [Fortsetzung]

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{R}.$$

Eine Basis für $N(A^T)$ sind die letzten $m - r$ Zeilen der (invertierbaren) Umformungsmatrix E.

Hier: $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ *ist eine Basis für $N(A^T)$.*