Lösung des inhomogenen Problems $(Ax = b)$

nach G.Strang, MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra, Lecture 8

M. Gruber

29.10.2009

Zusammenfassung

Algorithmus zur Berechnung aller Lösungen von $Ax = b$.

$r = \operatorname{rank} A$ entscheidet über Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen:

$r = m \Rightarrow$ es existiert (mindestens) eine Lösung.

$r = n \Rightarrow$ es existiert höchstens eine Lösung (Eindeutigkeit).

Übergang zu $\begin{bmatrix} U & c \end{bmatrix}$

Beispiel 1.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & b_1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & b_2 \\ 3 & 6 & 8 & 10 & b_3 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix}} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & b_3 - 3b_1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 - b_2 - b_1 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} U & c \end{bmatrix}}$$

- *Lösungsmenge bleibt unverändert:* $Ax = b \Leftrightarrow Ux = c$.
- *Lösbarkeitsbedingung (Version 1):* $Ax = b$ *lösbar* $\Leftrightarrow b_3 - b_2 - b_1 = 0$.
- *Lösbarkeitsbedingung (Version 2):* $Ax = b$ *lösbar* $\Leftrightarrow b \in C(A)$.

Übergang zu $\begin{bmatrix} R & d \end{bmatrix}$

Beispiel 1. [Fortsetzung]

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 - b_2 - b_1 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} U & c \end{bmatrix}} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 & 3b_1 - b_2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 - b_2 - b_1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 & 3b_1 - b_2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & b_2/2 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 - b_2 - b_1 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} R & d \end{bmatrix}}$$

- *Lösungsmenge bleibt unverändert:* $Ax = b \Leftrightarrow Ux = c \Leftrightarrow Rx = d$.
- *Pivot-Variablen:* x_1, x_3.
- *Freie Variablen:* x_2, x_4.

Die Vollständige Lösung von $Ax = b$

Beispiel 1. [Fortsetzung] *1. Setze alle freien Variablen* 0, *um eine* partikuläre Lösung x_p *von* $Ax = b$ *zu finden.*

2. *Setze der Reihe nach eine freie Variable* 1 *und die anderen* 0, *um unabhängige Vektoren des Nullraums* $N(A)$ *zu finden; kombiniere diese (linear) zu einer allgemeinen Lösung* x_n *von* $Ax = 0$.

3. *Die allgemeine Lösung von* $Ax = b$ *ist* $x = x_p + x_n$[1].

$$x_p = \begin{bmatrix} 3b_1 - b_2 \\ 0 \\ b_2/2 - b_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_n = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 3b_1 - b_2 \\ 0 \\ b_2/2 - b_1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

[1] denn $Ax = A(x_p + x_n) = Ax_p + Ax_n = b + 0 = b$.

Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Think bigger!

Sei A eine $m \times n$-Matrix, $b \in \mathbf{R}^m$, $\mathrm{rank}\, A = r$.

1. "Voller Zeilenrang" ($r = m$): es ist $b \in C(A)$ und $Ax = b$ ist lösbar.

2. "Voller Spaltenrang" ($r = n$): es ist $x_n = 0$ und die Lösung $x = x_p$ ist eindeutig (falls x_p existiert).

Beispiel 2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 6 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}$; $r = 2$, $x = x_p = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ *(sieht man "so").*

Beispiel 3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$; $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4/5 & -3/5 \\ 0 & 1 & 17/5 & 14/5 \end{bmatrix}$, $d = \begin{bmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{bmatrix}$, $r = 2$, $x_p = \begin{bmatrix} 4/5 \\ 3/5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x_n = s \begin{bmatrix} 4/5 \\ -17/5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3/5 \\ -14/5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x = x_p + x_n = \begin{bmatrix} 4/5 \\ 3/5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 4/5 \\ -17/5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3/5 \\ -14/5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Beispiel 3 mit Mathematica

```
In[1]:= A={{1,2,6,5},{3,1,1,1}};

In[2]:= b={2,3};

In[3]:= NullSpace[A]

Out[3]= {{3, -14, 0, 5}, {4, -17, 5, 0}}

In[4]:= LinearSolve[A,b]

         4  3
Out[4]= {-, -, 0, 0}
         5  5
```

The Big Picture

$r = m = n$	$r = n < m$	$r = m < n$	$r < m, r < n$
$R = I$	$R = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$	$R = \begin{bmatrix} I & F \end{bmatrix}$	$R = \begin{bmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
1 Lösung	0 oder 1 Lösung	∞ Lösungen	0 oder ∞ Lösungen

Wo I und F nebeneinander stehen (Spalte 3 und 4), soll das so verstanden werden: Die Matrizen I und F können sich "durchdringen"; blendet man die Spalten von F aus, sieht man I; blendet man die Spalten von I aus, sieht man F.