

Lösung des homogenen Problems ($Ax = 0$)

nach G.Strang, MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra, Lecture 7

M. Gruber

27.10.2009, Rev.1

Zusammenfassung

Algorithmus zur Berechnung des Nullraums $N(A)$.

Pivotvariablen und freie Variablen.

Spezielle Lösungen.

Zeilenstufenform; reduzierte Zeilenstufenform; Nullraummatrix.

M.Gruber, WS 2009/2010

Lineare Algebra

Übergang zur Zeilenstufenform

Beispiel 1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

- Lösungsmenge bleibt unverändert: $Ax = 0 \Leftrightarrow Ux = 0$.
- Form von U : "Zeilenstufenform".
- $r := \text{rank } A := \# \text{Pivot-Elemente} = 2$.
- Wir haben $n - r = 4 - 2 = 2$ "freie Spalten" und r "Pivot-Spalten".

Rücksubstitution

Beispiel 1. [Fortsetzung]

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- x_1, x_3 sind "Pivot-Variablen" (es gibt r Stück).
- x_2, x_4 sind "freie Variablen" (es gibt $n - r$ Stück).
- Spezielle Lösungen: $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$; allgemeine Lösung: $c \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

2

Übergang zur reduzierten Zeilenstufenform

Beispiel 1. [Fortsetzung]

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R.$$

- Lösungsmenge bleibt weiterhin unverändert: $Ax = 0 \Leftrightarrow Ux = 0 \Leftrightarrow Rx = 0$.
- Form von R : "reduzierte Zeilenstufenform".
- Pivot-Spalten enthalten $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, freie Spalten enthalten $F = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

3

Die Nullraummatrix

Beispiel 1. [Fortsetzung] *Schreibe die speziellen Lösungen spaltenweise in eine Matrix, die "Nullraummatrix":*

$$N = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$RN = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F + F \\ 0 \end{bmatrix} = 0.$$

4

Beispiel 2.

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 2 & 8 & 10 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R$$

$$N = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad \text{Wo ist } I? \quad \text{Wo ist } F?$$

5

$A(x) = 0$ in Mathematica

Mathematica liefert die Spalten der Nullraummatrix:

```
In[1] := A={{1,2,2,2},{2,4,6,8},{3,6,8,10}}
```

```
Out[1]= {{1, 2, 2, 2}, {2, 4, 6, 8}, {3, 6, 8, 10}}
```

```
In[2] := NullSpace[A]
```

```
Out[2]= {{2, 0, -2, 1}, {-2, 1, 0, 0}}
```

```
In[3] := NullSpace[Transpose[A]]
```

```
Out[3]= {{-1, -1, 1}}
```