Lösung des homogenen Problems ($Ax = 0$)

nach G.Strang, MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra, Lecture 7

M. Gruber

27.10.2009, Rev.1

Zusammenfassung

Algorithmus zur Berechnung des Nullraums $N(A)$.

Pivotvariablen und freie Variablen.

Spezielle Lösungen.

Zeilenstufenform; reduzierte Zeilenstufenform; Nullraummatrix.

Übergang zur Zeilenstufenform

Beispiel 1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

- *Lösungsmenge bleibt unverändert:* $Ax = 0 \Leftrightarrow Ux = 0$.
- *Form von* U*: "Zeilenstufenform".*
- $r := \operatorname{rank} A :=$ *#Pivot-Elemente* $= 2$.
- *Wir haben* $n - r = 4 - 2 = 2$ *"freie Spalten" und* r *"Pivot-Spalten".*

Rücksubstitution

Beispiel 1. [Fortsetzung]

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- x_1,x_3 *sind "Pivot-Variablen" (es gibt* r *Stück).*
- x_2,x_4 *sind "freie Variablen" (es gibt* $n - r$ *Stück).*
- *Spezielle Lösungen:* $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ *und* $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$*; allgemeine Lösung:* $c \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Übergang zur reduzierten Zeilenstufenform

Beispiel 1. [Fortsetzung]

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R.$$

- *Lösungsmenge bleibt weiterhin unverändert:* $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{U}\boldsymbol{x} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{R}\boldsymbol{x} = 0$.
- *Form von* $\boldsymbol{R}$*: "reduzierte Zeilenstufenform".*
- *Pivot-Spalten enthalten* $\boldsymbol{I} = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$*, freie Spalten enthalten* $\boldsymbol{F} = \left[\begin{smallmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right]$.

Die Nullraummatrix

Beispiel 1. [Fortsetzung] *Schreibe die speziellen Lösungen spaltenweise in eine Matrix, die "Nullraummatrix":*

$$N = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$RN = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F + F \\ 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Beispiel 2.

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 2 & 8 & 10 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R$$

$$N = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}. \qquad \textit{Wo ist } I\,? \qquad \textit{Wo ist } F?$$

$A(x) = 0$ in Mathematica

Mathematica liefert die Spalten der Nullraummatrix:

```
In[1]:= A={{1,2,2,2},{2,4,6,8},{3,6,8,10}}
Out[1]= {{1, 2, 2, 2}, {2, 4, 6, 8}, {3, 6, 8, 10}}

In[2]:= NullSpace[A]
Out[2]= {{2, 0, -2, 1}, {-2, 1, 0, 0}}

In[3]:= NullSpace[Transpose[A]]
Out[3]= {{-1, -1, 1}}
```