

Spaltenraum $C(A)$ und Nullraum $N(A)$

nach G.Strang, MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra, Lecture 6

M. Gruber

22.10.2009, Rev.1

Zusammenfassung

Vektorräume und Unterräume.

Lösbarkeit von $Ax = b$ für verschiedene b , Spaltenraum $C(A)$.

Lösungen von $Ax = 0$, Nullraum $N(A)$.

Ausblick: Lösungsmenge von $Ax = b \neq 0$.

Vektorräume und Unterräume

Im Vektorraum muss gelten:

$$v, w \in V \Rightarrow v + w \in V \quad \text{und} \quad c \in \mathbf{R}, v \in V \Rightarrow cv \in V,$$

oder auch (gleichwertig):

$$c, d \in \mathbf{R}, v, w \in V \Rightarrow cv + dw \in V.$$

Beispiel 1. Sei P eine Ebene und L eine Gerade in \mathbf{R}^3 mit $0 \in L, 0 \in P, L \not\subset P$.
Ist $P \cup L$ ein Unterraum? Nein. Ist $P \cap L$ ein Unterraum? Ja. Warum?

Spaltenraum $C(A)$

$C(A)$ = alle Linearkombinationen der Spalten von A .

Beispiel 2.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Füllt $C(A)$ den Vektorraum \mathbb{R}^4 ganz aus?

Verbindung zu " $Ax = b$ ": Ist $Ax = b$ für jedes b lösbar?

Nennen Sie b 's, für die $Ax = b$ lösbar ist; nennen Sie immer x dazu.

Umgekehrt geht es auch (sogar leichter): Nennen Sie x 's und zugehörige b 's.

Kann man eine Spalte von A weglassen, ohne dass $C(A)$ kleiner wird?

Was ist $C(A)$ geometrisch? Ist es ein Unterraum?

Nullraum $N(A)$

$N(A)$ = alle Lösungen x von $Ax = 0$.

Beispiel 3.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Wo liegt $N(A)$? ($\subset \mathbf{R}^3$? $\subset \mathbf{R}^4$?)

Nennen Sie Elemente von $N(A)$.

Nennen Sie alle Elemente von $N(A)$. $N(A) = \{x \mid \dots\}$.

Was ist $N(A)$ geometrisch? Ist es ein Unterraum?

Lösungen von $Ax = b \neq 0$

Beispiel 4.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Bilden die Lösungen einen Unterraum?

Nennen Sie Elemente der Lösungsmenge.

Wenn man zwei verschiedene Lösungen x und x' hat, was ist dann $A(x - x')$?

Geben Sie eine komplette Beschreibung der Lösungsmenge.

Was ist die Lösungsmenge geometrisch?