Vektorräume in $\mathbf{R}^n$

nach G.Strang, MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra, Lecture 5

M. Gruber

20.10.2009, Rev.1

Zusammenfassung

(Nachtrag zu Lektion 4:) Symmetrische Matrizen.
Der Begriff "Vektorraum". Vektorraum-Beispiele: $\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^3$,. . . , $\mathbf{R}^n$.
Der Begriff "Unterraum". Unterraum-Beispiele: Unterräume in $\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^3$,. . . , $\mathbf{R}^n$.
Zusammenhang zwischen Matrizen und Unterräumen in $\mathbf{R}^n$.

Symmetrische Matrizen

Symmetrische Matrizen sind solche, für die $\boxed{A^T = A}$ gilt, z.B. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 9 \\ 7 & 9 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 9 \\ 7 & 9 & 4 \end{bmatrix}$.
Symmetrische Matrizen treten oft in einer der folgenden Formen auf:

$$A = R^T R \quad \text{oder} \quad B = RR^T.$$

Wie sieht man, dass A und B symmetrisch sind?

Durch Transposition!

$$A^T = R^T R^{TT} = R^T R = A; \quad B^T = R^{TT} R^T = RR^T = B.$$

Vektorräume (1)

In Vektorräumen gibt es zwei Operationen, nämlich

die Addition zweier Vektoren:	$u + v$
die Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl:	cu

und es gilt eine Reihe abstrakter Regeln ($\rightarrow$ Buch).

Beispiel 1. $\mathbf{R}^2 =$ *Menge aller 2-komponentigen Vektoren* *ist ein Vektorraum.*

Wenn man den Nullvektor $\left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right]$ *entfernt, geht die Vektorraumeigenschaft verloren, denn*

$$0\left[\begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right], \quad \left[\begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}\right] + \left[\begin{smallmatrix}-3\\-2\end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right].$$

Vektorräume (2)

Beispiel 2. $\mathbf{R}^3 =$ *Menge aller 3-komponentigen Vektoren* *ist ein Vektorraum.*

Beachte: $\left[\begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}\right] \notin \mathbf{R}^3$.

Beispiel 3. $\mathbf{R}^n =$ *Menge aller n-komponentigen Vektoren* *ist ein Vektorraum.*

Beispiel 4. $\{\left[\begin{smallmatrix}a\\b\end{smallmatrix}\right] \mid a \geq 0, b \geq 0\}$ *ist <u>kein</u> Vektorraum. Warum nicht?*

Beispiel 5. $\{t\left[\begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}\right] \mid t \in \mathbf{R}\}$ *ist ein Vektorraum. Warum?*

Beispiel 6. $\{t\left[\begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}\right] + \left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right] \mid t \in \mathbf{R}\}$ *ist <u>kein</u> Vektorraum. Warum nicht?*

Unterräume (1)

Unterräume sind Teilmengen eines Vektorraums, die mit den von ihm geerbten Operationen "Vektoraddition" und "Skalarmultiplikation" selbst ein Vektorraum sind.

Beispiel 7. [Aufzählung der Unterräume des $\mathbf{R}^2$]

1. *$\mathbf{R}^2$;*

2. *jede Gerade, die durch den Nullpunkt geht;*

3. *$\left\{\left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right]\right\}$.*

Unterräume (2)

Beispiel 8. [Aufzählung der Unterräume des $\mathbf{R}^3$]

1. *$\mathbf{R}^3$;*

2. *jede Ebene, die durch den Nullpunkt geht;*

3. *jede Gerade, die durch den Nullpunkt geht;*

4. *$\left\{\left[\begin{smallmatrix}0\\0\\0\end{smallmatrix}\right]\right\}$.*

Matrizen und Unterräume

Sei A eine Matrix, z.B.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Die Spalten von A sind Vektoren des $\mathbf{R}^3$.

Die Menge der Linearkombinationen dieser Spalten

$$C(A) = \left\{ s \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{smallmatrix} \right] + t \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \right] \,\middle|\, s, t \in \mathbf{R} \right\} = \left\{ A \left[\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix} \right] \mid \left[\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix} \right] \in \mathbf{R}^2 \right\}$$

ist ein Unterraum von $\mathbf{R}^3$. Warum?

Man nennt ihn Spaltenraum von *(column space of)* A.