

Vektorräume in \mathbf{R}^n

nach G.Strang, MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra, Lecture 5

M. Gruber

20.10.2009, Rev.1

Zusammenfassung

(Nachtrag zu Lektion 4:) Symmetrische Matrizen.

Der Begriff "Vektorraum". Vektorraum-Beispiele: \mathbf{R}^2 , \mathbf{R}^3 , ..., \mathbf{R}^n .

Der Begriff "Unterraum". Unterraum-Beispiele: Unterräume in \mathbf{R}^2 , \mathbf{R}^3 , ..., \mathbf{R}^n .

Zusammenhang zwischen Matrizen und Unterräumen in \mathbf{R}^n .

Symmetrische Matrizen

Symmetrische Matrizen sind solche, für die $A^T = A$ gilt, z.B. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 9 \\ 7 & 9 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 9 \\ 7 & 9 & 4 \end{bmatrix}$.

Symmetrische Matrizen treten oft in einer der folgenden Formen auf:

$$A = R^T R \quad \text{oder} \quad B = R R^T.$$

Wie sieht man, dass A und B symmetrisch sind?

Durch Transposition!

$$A^T = R^T R^{TT} = R^T R = A; \quad B^T = R^{TT} R^T = R R^T = B.$$

Vektorräume (1)

In Vektorräumen gibt es zwei Operationen, nämlich

die Addition zweier Vektoren: $u + v$

die Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl: cu

und es gilt eine Reihe abstrakter Regeln (\rightarrow Buch).

Beispiel 1. $\mathbf{R}^2 =$ Menge aller 2-komponentigen Vektoren ist ein Vektorraum.

Wenn man den Nullvektor $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ entfernt, geht die Vektorraumeigenschaft verloren, denn

$$0 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vektorräume (2)

Beispiel 2. $\mathbf{R}^3 =$ Menge aller 3-komponentigen Vektoren ist ein Vektorraum.

Beachte: $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \notin \mathbf{R}^3$.

Beispiel 3. $\mathbf{R}^n =$ Menge aller n -komponentigen Vektoren ist ein Vektorraum.

Beispiel 4. $\{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \mid a \geq 0, b \geq 0\}$ ist kein Vektorraum. Warum nicht?

Beispiel 5. $\{t \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \mid t \in \mathbf{R}\}$ ist ein Vektorraum. Warum?

Beispiel 6. $\{t \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mid t \in \mathbf{R}\}$ ist kein Vektorraum. Warum nicht?

Unterräume (1)

Unterräume sind Teilmengen eines Vektorraums, die mit den von ihm geerbten Operationen "Vektoraddition" und "Skalarmultiplikation" selbst ein Vektorraum sind.

Beispiel 7. [Aufzählung der Unterräume des \mathbb{R}^2]

1. \mathbb{R}^2 ;
2. *jede Gerade, die durch den Nullpunkt geht;*
3. $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

Unterräume (2)

Beispiel 8. [Aufzählung der Unterräume des \mathbb{R}^3]

1. \mathbb{R}^3 ;
2. *jede Ebene, die durch den Nullpunkt geht;*
3. *jede Gerade, die durch den Nullpunkt geht;*
4. $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

Matrizen und Unterräume

Sei A eine Matrix, z.B.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Die Spalten von A sind Vektoren des \mathbf{R}^3 .

Die Menge der Linearkombinationen dieser Spalten

$$C(A) = \left\{ s \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \mid s, t \in \mathbf{R} \right\} = \left\{ A \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^2 \right\}$$

ist ein Unterraum von \mathbf{R}^3 . Warum?

Man nennt ihn **Spaltenraum von (column space of) A** .