LU-Faktorisierung

nach G.Strang, MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra, Lecture 4

M. Gruber

15.10.2009, Rev.1

Zusammenfassung

(Nachtrag zu Lektion 3:) Inverse von AB und A^T.

Die Inverse des Produkts der Eliminationsmatrizen einer Gauß-Elimination.

LU-Faktorisierung (ohne Zeilentauschoperationen).

Permutationsmatrizen (3×3).

$(AB)^{-1}$

A und B seien invertierbare $n \times n$-Matrizen.

$$\begin{aligned}
(AB)(B^{-1}A^{-1}) &= A(BB^{-1})A^{-1} \\
&= AA^{-1} \\
&= I. \\
(B^{-1}A^{-1})(AB) &= B^{-1}(A^{-1}A)B \\
&= B^{-1}B \\
&= I.
\end{aligned}$$

Es ist also $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

A^T und $(A^T)^{-1}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad A^T := \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Mathematica-Beispiel:

```
In[1]:= A={{1,2,3},{4,5,6}}
Out[1]= {{1, 2, 3}, {4, 5, 6}}
In[2]:= Transpose[A]
Out[2]= {{1, 4}, {2, 5}, {3, 6}}
```

Regeln:

(1) $(AB)^T = B^T A^T$, (2) falls A invertierbar: $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

LU- und LDU-Faktorisierung, Beispiel 1

- LU-Faktorisierung (wie kommt man von E_{12} zu L?)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}}_{E_{21}} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}}_{U} \qquad \Rightarrow \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}}_{E_{12}^{-1} =: L} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}}_{U}$$

- LDU-Faktorisierung (wie kommt man von U zu DU'?)

$$\Rightarrow \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{U'}$$

LU-Faktorisierung, Beispiel 2

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -5 & 1\end{bmatrix}}_{E_{32}}\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}}_{E_{31}=I}\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}}_{E_{21}} A = \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 10 & -5 & 1\end{bmatrix}}_{=E,\ \text{aber } E \text{ nicht berechnen,}\ldots} A = U,$$

…sondern E^{-1} (einfacher!)… : $\quad A = (E_{21}^{-1}E_{32}^{-1})U = \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 5 & 1\end{bmatrix}}_{=E^{-1}=:L} U.$

Die wesentlichen Koeffizienten der Eliminationsmatrizen erscheinen mit umgekehrten Vorzeichen an "ihren" Plätzen in L (wenn keine Zeilentauschoperationen vorkommen).

LU-Faktorisierung mit Mathematica

```
In[1]:= << LinearAlgebra`MatrixManipulation`
In[2]:= a = Table[Random[Integer, {0, 5}], {i, 1, 3}, {j, 1, 3}]
Out[2]= {{2, 3, 4}, {0, 5, 2}, {1, 1, 1}}
In[3]:= {lu, p, cn} = LUDecomposition[a]
Out[3]= {{{1, 1, 1}, {2, 1, 2}, {0, 5, -8}}, {3, 1, 2}, 1}
In[4]:= {l, u} = LUMatrices[lu]
Out[4]= {{{1, 0, 0}, {2, 1, 0}, {0, 5, 1}},
>    {{1, 1, 1}, {0, 1, 2}, {0, 0, -8}}}
```

Aufwand für LU-Faktorisierung

Sei A eine (ohne Zeilentauschoperation) invertierbare $n \times n$-Matrix.

- Wieviele Multiplikationen braucht man für die erste Spalte? $\approx n^2$.
- für die zweite Spalte? $\approx (n-1)^2$.
- insgesamt? $\approx \Sigma_{1 \leq k \leq n} k^2$.
- geschlossene Form für $\Sigma_{1 \leq k \leq n} k^2$? $\approx n^3/3$.

CPU-Sekunden für LU-Faktorisierung (Mathematica)

```
In[1]:= a[n_] := Table[Random[Integer, {0, 10}], {i, 1, n}, {j, 1, n}]

In[2]:= values = Table[{n, First[Timing[LUDecomposition[a[n]];]][[1]]},

>     {n, 16, 128, 16}]

Out[2]= {{16, 0.004}, {32, 0.076005}, {48, 0.252016}, {64, 0.400025},

>     {80, 0.952059}, {96, 2.00813}, {112, 3.66023}, {128, 6.3564}}
```

Die 3×3-Permutationsmatrizen

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

- Matrixmultiplikation in G führt nicht aus G hinaus.
- G enthält zu jedem Element P auch sein Inverses, P^{-1}.
- Für jedes $P \in G$ ist $P^{-1} = P^T$.