

Matrixmultiplikation, inverse Matrizen

nach G.Strang, MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra, Lecture 3

M. Gruber

13.10.2009

Zusammenfassung

Matrixmultiplikation (vier Formen!).

Die Inverse einer Matrix.

Wie findet man Inverse? Mit Gauß-Jordan!

M.Gruber, WS 2009/2010

Lineare Algebra

Matrixmultiplikation $AB = C$, 1.Form

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} \end{bmatrix}}_B = \underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} \end{bmatrix}}_C$$

$(m \times n$ -Matrix A) mal $(n \times p$ -Matrix B) = $(m \times p$ -Matrix C).

C erbt von A die Anzahl der Zeilen und von B die Anzahl der Spalten.

Die Spaltenzahl von A muss mit der Zeilenzahl von B übereinstimmen.

Zeile 3 von A und Spalte 4 von B liefern Element $c_{34} = \sum_{1 \leq k \leq 3} a_{3k} b_{k4}$.

Matrixmultiplikation $AB = C$, 2.Form

$$\begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{ccc}
 a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
 a_{21} & a_{22} & a_{23} \\
 a_{31} & a_{32} & a_{33} \\
 a_{41} & a_{42} & a_{43}
 \end{array} \right] \underbrace{\left[\begin{array}{ccccc}
 b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\
 b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \\
 b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35}
 \end{array} \right]}_B \\
 \underbrace{\hspace{10em}}_A
 \end{array}
 =
 \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
 c_{11} & c_{12} & c_{13} & \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ a_{42} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \\ a_{43} \end{bmatrix} & c_{15} \\
 c_{21} & c_{22} & c_{23} & b_{14} & b_{24} & b_{34} & c_{25} \\
 c_{31} & c_{32} & c_{33} & & & & c_{35} \\
 c_{41} & c_{42} & c_{43} & & & & c_{45}
 \end{array} \right]}_C
 \end{array}$$

Die Spalten von C sind Linearkombinationen der Spalten von A .

Matrixmultiplikation $AB = C$, 3.Form

$$\begin{array}{c}
 \underbrace{\left[\begin{array}{ccc}
 a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
 a_{21} & a_{22} & a_{23} \\
 a_{31} & a_{32} & a_{33} \\
 a_{41} & a_{42} & a_{43}
 \end{array} \right]}_A \underbrace{\left[\begin{array}{ccccc}
 b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\
 b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \\
 b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35}
 \end{array} \right]}_B \\
 \hspace{10em}
 \end{array}
 =
 \underbrace{\left[\begin{array}{ccccc}
 & \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} \end{bmatrix} \\
 a_{31} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \end{bmatrix} & + & a_{32} \begin{bmatrix} b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \end{bmatrix} & + & a_{33} \begin{bmatrix} b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} \end{bmatrix}
 \end{array} \right]}_C
 \end{array}$$

Die Zeilen von C sind Linearkombinationen der Zeilen von B .

Matrixmultiplikation $AB = C$, 4.Form

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} \end{bmatrix}}_B \\
 &= \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ a_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \\ a_{43} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} \end{bmatrix} \\
 \text{Beispiele: } & \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 12 \\ 3 & 18 \\ 4 & 24 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 8 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 12 \\ 3 & 18 \\ 4 & 24 \end{bmatrix} .
 \end{aligned}$$

Blockmultiplikation

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [a_{11} & a_{12} & a_{13}] & \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} \\ [a_{21} & a_{22} & a_{23}] & \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} \\ [a_{31} & a_{32} & a_{33}] & \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Die beiden Varianten sind kombinierbar.

Inverse

Sei A sei quadratisch, d.h. Zeilenzahl = Spaltenzahl.

Es gilt genau eine der beiden Alternativen:

- Es gibt eine Matrix A^{-1} mit

$$A^{-1}A = I = AA^{-1}. \quad (1)$$

Dann nennt man A *invertierbar (nichtsingulär)* und A^{-1} ihre *Inverse*.

- Es gibt keine Matrix A^{-1} mit der Eigenschaft (1).

Dann nennt man A *nichtinvertierbar (singulär)*,

6

Beispiel

Hat hat $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ eine Inverse? Nein. Warum nicht?

- Wäre $AB = I$, dann wären $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ Linearkombinationen der Spalten von A . Dies ist aber nicht möglich. Warum nicht?
- Wäre $BA = I$, dann wären $[1 \ 0]$ und $[0 \ 1]$ Linearkombinationen der Zeilen von A . Dies ist aber nicht möglich. Warum nicht?
- Es gibt ein $x \neq 0$ mit $Ax = 0$ (welches x z.B.?).¹

Wäre $BA = I$, dann wäre $(BA)x = x \neq 0$ und $B(Ax) = B0 = 0$, Widerspruch!

¹Die Spalten singulärer Matrizen lassen sich (nichttrivial) so kombinieren, dass der Nullvektor herauskommt

Wie berechnet man Inverse?

$$AA^{-1} = I \Rightarrow A^{-1} = ?.$$

Gauß-Jordan-Idee:

die k -te Spalte von A^{-1} ist Lösung von $Ax = b_k$, wenn b_k die k -te Spalte von I ist.

Beispiel: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$. Wir lösen alle Gleichungssysteme auf einmal:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{[A|I]} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}}_{[I|A^{-1}] \text{ (warum?)}}$$

8

Gauß-Jordan

Sei E das Produkt der Eliminationsmatrizen, die A schrittweise in I überführen:

$$E[A|I] = [EA|EI] = [I|E] \Rightarrow E = A^{-1}$$

9

Inverse in Mathematica

```
In[1] := A={{1,3},{2,7}}
```

```
Out[1]= {{1, 3}, {2, 7}}
```

```
In[2] := Inverse[A]
```

```
Out[2]= {{7, -3}, {-2, 1}}
```

```
In[3] := B={{1,3},{2,6}}
```

```
Out[3]= {{1, 3}, {2, 6}}
```

```
In[4] := Inverse[B]
```

```
Inverse::sing: Matrix {{1, 3}, {2, 6}} is singular.
```

```
Out[4]= Inverse[{{1, 3}, {2, 6}}]
```