Matrixmultiplikation, inverse Matrizen

nach G.Strang, MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra, Lecture 3

M. Gruber

13.10.2009

Zusammenfassung

Matrixmultiplikation (vier Formen!).

Die Inverse einer Matrix.

Wie findet man Inverse? Mit Gauß-Jordan!

Matrixmultiplikation $AB = C$, 1.Form

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} \end{bmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} \end{bmatrix}}_{C}$$

($m \times n$-Matrix A) mal ($n \times p$-Matrix B) = ($m \times p$-Matrix C).

C erbt von A die Anzahl der Zeilen und von B die Anzahl der Spalten.

Die Spaltenzahl von A muss mit der Zeilenzahl von B übereinstimmen.

Zeile 3 von A und Spalte 4 von B liefern Element $c_{34} = \Sigma_{1 \le k \le 3} a_{3k} b_{k4}$.

Matrixmultiplikation $AB = C$, 2.Form

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} \end{bmatrix}}_{B}$$

$$= \underbrace{\left[\begin{matrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} \end{matrix} \quad b_{14}\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{bmatrix} + b_{24}\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ a_{42} \end{bmatrix} + b_{34}\begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \\ a_{43} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} c_{15} \\ c_{25} \\ c_{35} \\ c_{45} \end{matrix}\right]}_{C}$$

Die Spalten von C sind Linearkombinationen der Spalten von A.

Matrixmultiplikation $AB = C$, 3.Form

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} \end{bmatrix}}_{B}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} [c_{11} \;\; c_{12} \;\; c_{13} \;\; c_{14} \;\; c_{15}] \\ [c_{21} \;\; c_{22} \;\; c_{23} \;\; c_{24} \;\; c_{25}] \\ a_{31}\,[b_{11} \; b_{12} \; b_{13} \; b_{14} \; b_{15}] + a_{32}\,[b_{21} \; b_{22} \; b_{23} \; b_{24} \; b_{25}] + a_{33}\,[b_{31} \; b_{32} \; b_{33} \; b_{34} \; b_{35}] \\ [c_{41} \;\; c_{42} \;\; c_{43} \;\; c_{44} \;\; c_{45}] \end{bmatrix}}_{C}$$

Die Zeilen von C sind Linearkombinationen der Zeilen von B.

Matrixmultiplikation $AB = C$, 4.Form

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} \end{bmatrix}}_{B}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ a_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \\ a_{43} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} \end{bmatrix}$$

Beispiele: $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 12 \\ 3 & 18 \\ 4 & 24 \end{bmatrix}$. $\quad \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 8 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 12 \\ 3 & 18 \\ 4 & 24 \end{bmatrix}$.

Blockmultiplikation

$$\left[\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ \hline b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|c} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Die beiden Varianten sind kombinierbar.

Inverse

Sei A sei quadratisch, d.h. Zeilenzahl = Spaltenzahl.

Es gilt genau eine der beiden Alternativen:

- Es gibt eine Matrix A^{-1} mit

$$A^{-1}A = I = AA^{-1}. \tag{1}$$

  Dann nennt man A *invertierbar (nichtsingulär)* und A^{-1} ihre *Inverse*.

- Es gibt keine Matrix A^{-1} mit der Eigenschaft (1).

  Dann nennt man A *nichtinvertierbar (singulär)*,

Beispiel

Hat hat $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ eine Inverse? Nein. Warum nicht?

- Wäre $AB = I$, dann wären $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$ und $\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$ Linearkombinationen der Spalten von A. Dies ist aber nicht möglich. Warum nicht?

- Wäre $BA = I$, dann wären $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ und $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ Linearkombinationen der Zeilen von A. Dies ist aber nicht möglich. Warum nicht?

- Es gibt ein $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ mit $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ (welches $\boldsymbol{x}$ z.B.?). [1].

  Wäre $BA = I$, dann wäre $(BA)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ und $B(A\boldsymbol{x}) = B\mathbf{0} = \mathbf{0}$, Widerspruch!

[1] Die Spalten singulärer Matrizen lassen sich (nichttrivial) so kombinieren, dass der Nullvektor herauskommt

Wie berechnet man Inverse?

$$AA^{-1} = I \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = ?.$$

Gauß-Jordan-Idee:

die $\boldsymbol{k}$-te Spalte von A^{-1} ist Lösung von $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}_k$, wenn $\boldsymbol{b}_k$ die $\boldsymbol{k}$-te Spalte von I ist.

Beispiel: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$. Wir lösen alle Gleichungssysteme auf einmal:

$$\underbrace{\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{[A|I]} \quad \rightsquigarrow \quad \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \quad \rightsquigarrow \quad \underbrace{\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]}_{[I|A^{-1}] \ \text{(warum?)}}$$

Gauß-Jordan

Sei E das Produkt der Eliminationsmatrizen, die A schrittweise in I überführen:

$$E[A|I] = [EA|EI] = [I|E] \Rightarrow E = A^{-1}$$

Inverse in Mathematica

```
In[1]:= A={{1,3},{2,7}}
Out[1]= {{1, 3}, {2, 7}}
In[2]:= Inverse[A]
Out[2]= {{7, -3}, {-2, 1}}
In[3]:= B={{1,3},{2,6}}
Out[3]= {{1, 3}, {2, 6}}
In[4]:= Inverse[B]
Inverse::sing: Matrix {{1, 3}, {2, 6}} is singular.
Out[4]= Inverse[{{1, 3}, {2, 6}}]
```