Elimination mit Matrizen

nach G.Strang, MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra, Lecture 2

M. Gruber

08.10.200, Rev.1

Zusammenfassung

Vorwärtselimination (Gauß-Elimination),

Rückwärtssubstitution,

Eliminationsmatrizen,

Matrixmultiplikation (i.a. nicht kommutativ; aber assoziativ).

Aufgabe

Löse (systematisch)

$$
\begin{aligned}
x + 2y + z &= 2\\
3x + 8y + z &= 12\\
4y + z &= 2,
\end{aligned}
$$

d.h. löse

$$
\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 12 \\ 2 \end{bmatrix}.
$$

Vorwärtselimination

Umformung der "geränderten" (*augmented*) Matrix:

$$\underbrace{\begin{array}{ccc|c} \color{red}{1} & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 1 & 12 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{array}}_{A\,|\,b} \rightsquigarrow \begin{array}{ccc|c} \color{red}{1} & 2 & 1 & 2 \\ 0 & \color{red}{2} & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{array} \rightsquigarrow \underbrace{\begin{array}{ccc|c} \color{red}{1} & 2 & 1 & 2 \\ 0 & \color{red}{2} & -2 & 6 \\ 0 & 0 & \color{red}{5} & -10 \end{array}}_{U\,|\,c}$$

Ziel: Erzeugung der "oberen Dreiecksmatrix" (*upper triangular matrix*) U.

Pivotelemente (*pivot*: Dreh-/Angelpunkt) rot hervorgehoben.

Pivotelemente sind immer $\neq 0$ (eventuell durch Zeilentausch erreichbar).

Rechtfertigung der Vorwärtselimination: $Ax = b$ gilt genau dann, wenn $Ux = c$ gilt.

Rückwärtssubstitution

Das Ergebnis der Vorwärtselimination

$$\begin{array}{ccc|c} \color{red}{1} & 2 & 1 & 2 \\ 0 & \color{red}{2} & -2 & 6 \\ 0 & 0 & \color{red}{5} & -10 \end{array}$$

Zeile für Zeile von unten nach oben auswerten:

$$5z = -10 \Rightarrow z = -2.$$

$$2y - 2z = 6 \Rightarrow 2y = 2 \Rightarrow y = 1.$$

$$x + 2y + z = 2 \Rightarrow x = 2.$$

Eliminationsmatrizen

Schritte der Vorwärtselimination

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 1 & 12 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{array} \quad\rightsquigarrow\quad \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{array} \quad\rightsquigarrow\quad \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & -10 \end{array}$$

als Matrixoperationen:

$$E_{21}[A \mid b] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 1 & 12 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$E_{32}E_{21}[A \mid b] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & -10 \end{bmatrix}.$$

Kommutativität und Assoziativität

1. schlechte Nachricht: im allgemeinen ist $AB \neq BA$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 6 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \text{ aber } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. gute Nachricht: es gilt immer $(AB)C = A(BC)$.

   Z.B. ist $E_{32}(E_{21}A) = (E_{32}E_{21})A$ und daher

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \right) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 6 & -2 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{“does the whole job”}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}}_{U}.$$

Inverse der Eliminationsmatrizen

"Wie kommt man von U zurück zu A?". Mit den Inversen von E_{21} und E_{32}!

$$E_{21}^{-1}E_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

$$E_{32}^{-1}E_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

I ist das neutrale multiplikative Element: $IB = BI$ für jedes B.

Mit $L = E_{21}^{-1}E_{32}^{-1}$ gilt $A = LU$, denn

$$E_{21}^{-1}E_{32}^{-1}E_{32}E_{21}A = A.$$

Permutationsmatrizen

1. Welche Matrix tauscht die Zeilen von $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$?

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{P} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}.$$

2. Welche Matrix tauscht die Spalten von $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$? P von rechts!

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & a \\ d & c \end{bmatrix}.$$