Geometrie linearer Gleichungssysteme

nach G.Strang, MIT OpenCourseWare 18.06 Linear Algebra, Lecture 1

M. Gruber

06.10.2009, Rev.1

Zusammenfassung

Einstieg mit linearen Gleichungssystemen; einfacher Fall: n Gleichungen, n Unbekannte.

Beispiele für $n = 2$ und $n = 3$.

Was bedeutet das Lösen von Gleichungen geometrisch?

“Matrix”, “Spaltenvektor”, “Zeilenvektor”; “Zeilenbild”, “Spaltenbild”.

“Matrix mal Spaltenvektor”, “Zeilenvektor mal Matrix”, “Matrix mal Matrix”.

Beispiel 1 (Matrixform)

Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x - y &= 0 \\ -x + 2y &= 3 \end{aligned}$$

in Matrixform (Koeffizienten-Matrix mal Unbekannten-Vektor = Rechte-Seite-Vektor):

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Beispiel 1 (Zeilenbild)

Matrixform

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix},$$

als "Zeile(n) mal Spalte" gelesen:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2x + (-1)y = 0$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (-1)x + 2y = 3$$

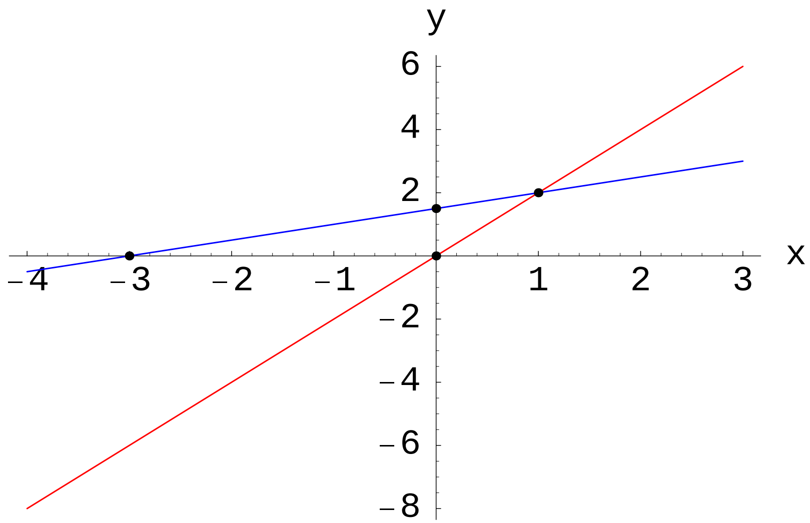

Abbildung 1: Zeilenbild (*row picture*)

Beispiel 1 (Spaltenbild)

Matrixform

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

als "Linearkombination von Spalten" gelesen:

$$x \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}}_{u} + y \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{v} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}}_{b}$$

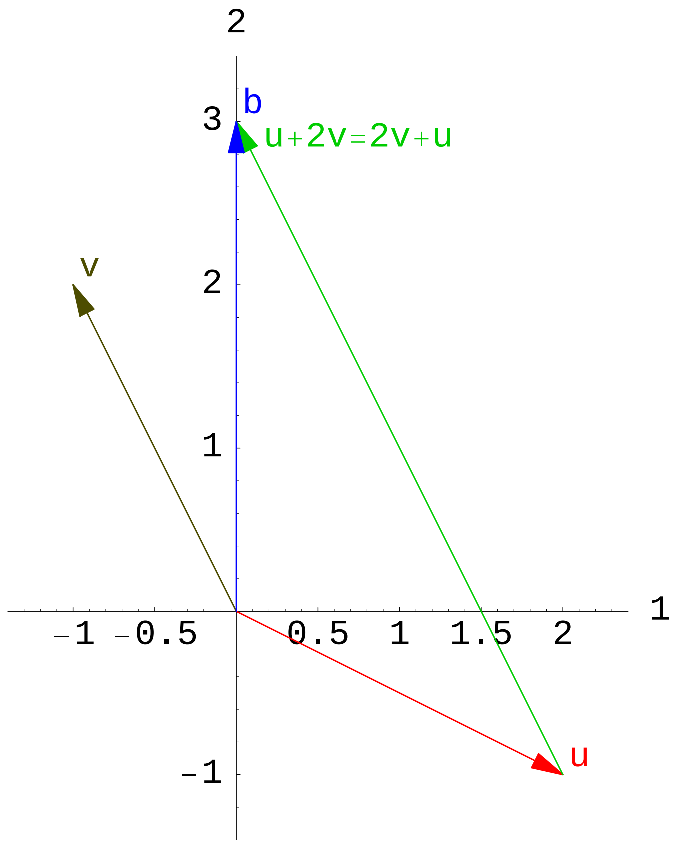

Abbildung 2: Spaltenbild (*column picture*)

Beispiel 1 (Diskussion)

1. Ist das Problem für beliebiges $\boldsymbol{b}$
   (a) lösbar?
   (b) eindeutig lösbar?

2. Wie sehen $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ (und $\boldsymbol{b}$) aus bei
   (a) Unlösbarkeit?
   (b) nicht-eindeutiger Lösbarkeit?

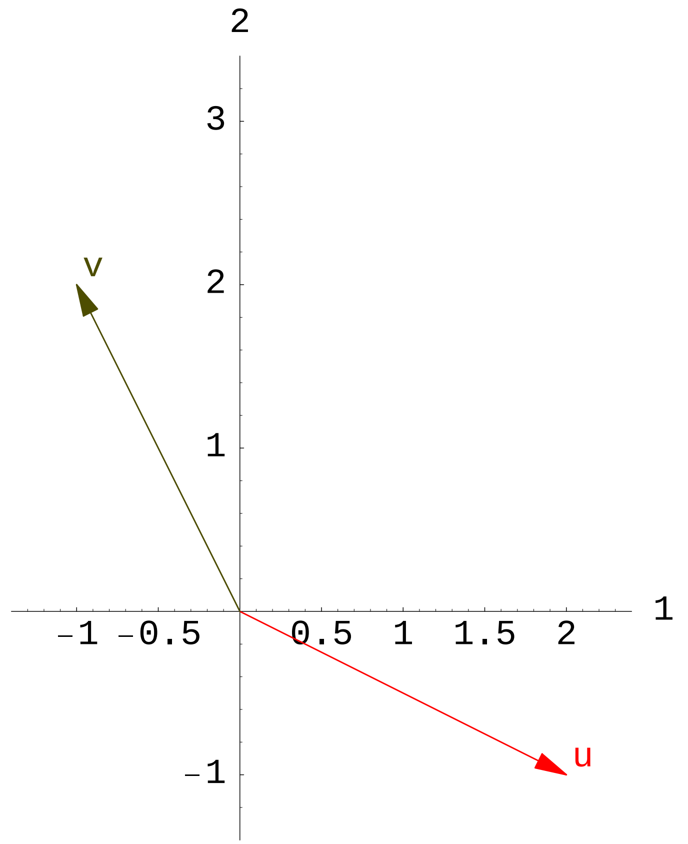

Abbildung 3: Spalten der Matrix $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$

Beispiel 2 (Matrixform)

Gleichungssystem

$$2x - y = 0$$
$$-x + 2y - z = -1$$
$$-3y + 4z = 4$$

in Matrixform:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Wie sieht das Zeilenbild aus?

Wie sieht das das Spaltenbild aus?

Beispiel 2 (Zeilenbild)

Matrixform

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

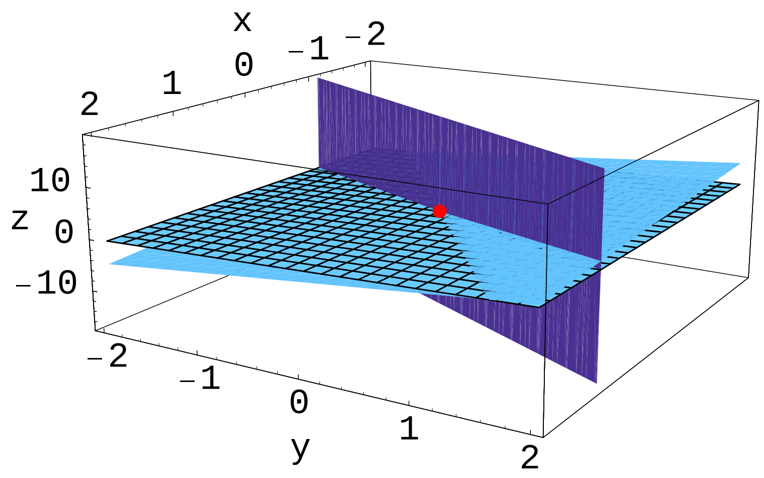

Abbildung 4: Zeilenbild (*row picture*)

Beispiel 2 (Spaltenbild)

Die Aufgabe

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

liest sich so:

$$x \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Die Lösung liegt auf der Hand.

Nämlich? (So leicht geht's nicht immer.)

"Matrix mal Spaltenvektor", abstrakt

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \ldots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\text{Matrix mal Spaltenvektor} = \text{Spaltenvektor}}$$

"Zeilenvektor mal Matrix", abstrakt

$$\begin{bmatrix} y_1 & \cdots y_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = y_1 \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix} + \cdots + y_m \begin{bmatrix} a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} y_1 a_{11} & \cdots & y_1 a_{1n} \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} y_m a_{m1} & \cdots & y_m a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & \cdots & y_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} y_1 & \cdots & y_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\text{Zeilenvektor} \times \text{Matrix} = \text{Zeilenvektor}}$$

“Matrix mal Matrix”, abstrakt

$$\text{Seien } A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{*1} & \cdots & A_{*q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1*} \\ \vdots \\ A_{p*} \end{bmatrix}$$

$$\text{und } B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{q1} & \cdots & b_{qr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{*1} & \cdots & B_{*r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{1*} \\ \vdots \\ B_{q*} \end{bmatrix}.$$

$$\text{Dann gilt} \quad \begin{bmatrix} AB_{*1} & \cdots & AB_{*r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1*}B_{*1} & \cdots & A_{1*}B_{*r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p*}B_{*1} & \cdots & A_{p*}B_{*r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1*}B \\ \vdots \\ A_{p*}B \end{bmatrix} =: AB.$$

$$\boxed{(p \times q)\text{-Matrix mal } (q \times r)\text{-Matrix} = (p \times r)\text{-Matrix.}}$$

Matrizen in Mathematica

```
In[1]:= A={{2,3},{5,7}}
Out[1]= {{2, 3}, {5, 7}}
In[2]:= B={{11,13,17},{19,23,29}}
Out[2]= {{11, 13, 17}, {19, 23, 29}}
In[3]:= MatrixForm[A]
Out[3]//MatrixForm= 2   3
                    5   7
In[4]:= MatrixForm[B]
Out[4]//MatrixForm= 11   13   17
                    19   23   29
```

Vektoren in Mathematica

```
In[5]:= x={31,37}
Out[5]= {31, 37}
In[6]:= y={{41,43}}
Out[6]= {{41, 43}}
In[7]:= MatrixForm[x]
Out[7]//MatrixForm= 31
                    37
In[8]:= MatrixForm[y]
Out[8]//MatrixForm= 41   43
```

"Matrix mal Spaltenvektor" mit Mathematica

```
In[9]:= A

Out[9]= {{2, 3}, {5, 7}}

In[10]:= x

Out[10]= {31, 37}

In[11]:= A.x

Out[11]= {173, 414}
```

"Zeilenvektor mal Matrix" mit Mathematica

```
In[12]:= y

Out[12]= {{41, 43}}

In[13]:= B

Out[13]= {{11, 13, 17}, {19, 23, 29}}

In[14]:= y.B

Out[14]= {{1268, 1522, 1944}}
```

“Matrix mal Matrix” mit Mathematica

```
In[15]:= A

Out[15]= {{2, 3}, {5, 7}}

In[16]:= B

Out[16]= {{11, 13, 17}, {19, 23, 29}}

In[17]:= A.B

Out[17]= {{79, 95, 121}, {188, 226, 288}}
```

“Matrix mal Matrix” mit Mathematica, Fehlerfall

```
In[18]:= B.A

Dot::dotsh: Tensors {{11, 13, 17}, {19, 23, 29}} and {{2, 3}, {5, 7}}
     have incompatible shapes.

Out[18]= {{11, 13, 17}, {19, 23, 29}} . {{2, 3}, {5, 7}}
```