Lineare Algebra, Prüfung, mit Lösungen

M. Gruber

26. Januar 2010, 13:30–15:00, R0.007, R1.008, R1.049, R2.007 (117)

1. Sei $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

   Betrachtet werden die fundamentalen Grundräume $N(A)$ (Nullraum von A), $C(A)$ (Spaltenraum von A), $N(A^T)$ (linker Nullraum von A) und $C(A^T)$ (Zeilenraum von A).

   (a) Welchen Rang hat A? rank $A = \boxed{2}$ *2 P.*

   (b) Geben Sie eine Basis für $N(A)$ an. Basis für $N(A)$: $\boxed{\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}}$ *3 P.*

   (c) Geben Sie eine Basis für $C(A)$ an. Basis für $C(A)$: $\boxed{\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}}$ *2 P.*

   (d) Geben Sie eine Basis für $N(A^T)$ an. Basis für $N(A^T)$: $\boxed{\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}}$ *2 P.*

   (e) Geben Sie eine Basis für $C(A^T)$ an. Basis für $C(A^T)$: $\boxed{\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}}$ *2 P.*

   (f) Geben Sie den Projektor P an, der auf $C(A)$ projiziert. $P = \boxed{\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}}$ *4 P.*

2. Sei $q_1 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$ und $q_2 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$.

   (a) Sei $v = 2q_1 - 5q_2$. Welche Länge hat v? $\|v\| = \boxed{\sqrt{29}}$ *3 P.*

(b) Sei v wie in (2a). Welches Ergebnis liefert Gram-Schmidt bei Eingabe von q_1, q_2, v?

Gram-Schmidt liefert $\boxed{q_1, q_2, 0}$ *3 P.*

(c) Sei $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. Welches Ergebnis liefert Gram-Schmidt bei Eingabe von q_1, q_2, u?

Gram-Schmidt liefert $\boxed{q_1, q_2, \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}}$ *6 P.*

3. Sei $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & u \\ 0 & 1 & v \\ u & v & -1 \end{bmatrix}$ mit $u, v \in \mathbf{R}$.

(a) Kann A auch nicht-reelle Eigenwerte haben? Antwort (ja/nein): $\boxed{\text{nein}}$ *3 P.*

(b) Welchen Wert hat $\det A$? $\det A = \boxed{-1 - u^2 - v^2}$ *3 P.*

(c) Ist A positiv definit? Antwort (ja/nein): $\boxed{\text{nein}}$ *3 P.*

4. Die Matrix $A = \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 7 & -6 \end{bmatrix}$ ist in der Form $A = S\Lambda S^{-1}$ zu diagonalisieren.

(a) Wie lautet Ihre Eigenwertmatrix Λ?

$\Lambda = \boxed{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$ *3 P.*

(b) Wie lautet Ihre Eigenvektormatrix S?

$S = \boxed{\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}}$ *3 P.*

(c) Gesucht ist eine Matrix B mit $B^3 = A$. Wie lautet B? $B = \boxed{A}$ *4 P.*

5. $M = \begin{bmatrix} 2/3 & y \\ x & z \end{bmatrix}$ sei eine Markov-Matrix.

(a) Nennen Sie einen Eigenwert von M.

Ein Eigenwert von M ist $\boxed{1}$ *2 P.*

(b) Wählen Sie x, y, z so, dass $\begin{bmatrix} 1/4 \\ 3/4 \end{bmatrix}$ ein stationärer Zustand von M ist.

$x, y, z =$ $\boxed{1/3, 1/9, 8/9}$ *8 P.*

6. Sei $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 2 & -4 & -6 & 4 \end{bmatrix}$.

(a) Wie lautet die vollständige Lösung von $Ax = 0$?

vollständige Lösung: $\boxed{s \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$ *3 P.*

(b) Sei $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Welche der Lösungen von $Ax = 0$ kommt b am nächsten?

x mit minimalem Abstand zu b: $\boxed{\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ -1/2 \\ 0 \end{bmatrix}}$ *7 P.*

7. Sei $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & 11 \\ 3 & 6 & 20 \end{bmatrix}$.

(a) Wie lautet die LU-Zerlegung von A?

$L =$ $\boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$ *2 P.*

$U =$ $\boxed{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}$ *2 P.*

(b) Sei $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$. Lösen Sie $Ly = b$ und $Ux = y$. Wie lauten y und x?

$y =$ $\boxed{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}$ *3 P.*

$x =$ $\boxed{\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/4 \\ 0 \end{bmatrix}}$ *3 P.*

8. Gegeben sei das Differentialgleichungssystem $\frac{d}{dt}u = Au$ mit der Systemmatrix $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$.

(a) Welche Eigenwerte hat A?

Eigenwerte von A: $\boxed{0, -4}$ *3 P.*

(b) Die Lösung kann man schreiben als $u(t) = M(t)u(0)$ mit einer geeigneten t-abhängigen Matrix $M(t)$. Geben Sie eine Formel für die Matrix $M(t)$ an.

$M(t) = \boxed{e^{tA}}$ *3 P.*

(c) Was ist $\lim_{t\to\infty} u(t)$, wenn $u(0) = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix}$ ist?

$\lim_{t\to\infty} u(t) = \boxed{\begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix}}$ *4 P.*

(d) Was ist $\lim_{t\to\infty} u(t)$, wenn $u(0) = \begin{bmatrix} 10 \\ -10 \end{bmatrix}$ ist?

$\lim_{t\to\infty} u(t) = \boxed{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$ *4 P.*