Saalübung

1. Ergänzen Sie die Matrix
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ \_ & \_ \end{bmatrix}$$
so, dass sie Eigenvektoren $x_1 = \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$ und $x_2 = \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$ hat.

Hausaufgabe Die Aufgaben stammen aus der 18.06-Abschlussprüfung des Jahres 2005 (siehe `http://ocw.mit.edu/OcwWeb/Mathematics/18-06Spring-2005/Exams/index.htm`).

1. Ich suche ein Beispiel mit einer $m \times n$-Matrix A und Vektoren b, c derart, dass
   (a) $Ax = b$ keine Lösung und
   (b) $A^T y = c$ genau eine Lösung

   hat.

   Warum kann ich kein solches Beispiel finden?

2. Wir befinden uns in $\mathbf{R}^m$. Angenommen, ich gebe Ihnen Vektoren b und p und linear unabhängige Vektoren $a_1, \ldots, a_n$ und behaupte, dass p die Projektion von b auf den von $a_1, \ldots, a_n$ aufgespannten Unterraum ist.

   Wie prüfen Sie nach, ob meine Behauptung wahr ist?

3. (a) Welche Determinante hat
$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}?$$
   (b) Für die 5×5-Matrix
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$
   gilt:

   i. $A - I$ hat Rang ______

   ii. und die Spur von A ist ______.

   Benutzen Sie diese Fakten, um die fünf Eigenwerte von A zu bestimmen.

   (c) Geben Sie die $(3, 1)$- und $(1, 3)$-Komponente von A^{-1} an.

4. Sei S ein vierdimensionaler Unterraum des $\mathbf{R}^7$ und P die Projektionsmatrix auf S.
   (a) Wie lauten die sieben Eigenwerte von P?
   (b) Beschreiben Sie sämtliche zugehörige Eigenvektoren.