Saalübung

1. ([1], Ex. 4.2, 1–4) Finden Sie jeweils die Pojektionsmatrix P, die b auf die Gerade durch a projiziert, berechnen Sie das Projektionsbild $p = Pb$ und prüfen Sie $e \perp a$ nach.

   (a) $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix}$,

   (b) $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

2. ([1], Ex. 4.2, 5) Berechnen Sie die Projektionsmatrix P_1, die auf die Gerade durch $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ projiziert, und die Projektionsmatrix P_2, die auf die Gerade durch $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ projiziert.

   Berechnen Sie das Produkt P_1P_2 und erläutern Sie das Ergebnis.

Hausaufgabe

1. ([1], Ex. 4.2, 1–4) Finden Sie jeweils die Pojektionsmatrix P, die b auf die Gerade durch a projiziert, berechnen Sie das Projektionsbild $p = Pb$ und prüfen Sie $e \perp a$ nach.

   (a) $a = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$,

   (b) $a = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

2. ([1], Ex. 4.2, 7) (Fortsetzung von Saalübung 2) Finden Sie die Projektionsmatrix P_3, die auf die Gerade durch $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ projiziert.

   Berechnen Sie $P_1 + P_2 + P_3$ und erläutern Sie das Ergebnis.

   Sei $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $p_i = P_i b$ für $i = 1, 2, 3$. Welche Eigenschaft haben p_1, p_2, p_3?

3. ([1], Ex. 4.2, 11) Projizieren Sie b auf den Spaltenraum von A, indem Sie $A^T A\hat{x} = A^T b$ lösen und $p = A\hat{x}$ berechnen.

   (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$,

   (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$.

4. ([1], Ex. 4.2, 30) Sei $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 4 & 8 & 8 \end{bmatrix}$.

   (a) Finden Sie die Projektionsmatrix P_C auf $C(A)$.

   (b) Finden Sie die Projektionsmatrix P_R auf $C(A^T)$.

   (c) Berechnen Sie $P_C A P_R$ und erläutern Sie das Ergebnis.

Literatur

[1] G. Strang. *Introduction to Linear Algebra*. Wellesley-Cambridge Press, third edition, 2003.