

Saalübung

1. ([1], Ex. 4.1, 3) Konstruieren Sie (falls möglich) eine Matrix A mit
 - (a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} \in C(A)$ und $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in N(A)$.
 - (b) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} \in C(A^T)$ und $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in N(A)$.
 - (c) $Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ist lösbar und $A^T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.
 - (d) A ist nicht die Nullmatrix und jede Zeile ist zu jeder Spalte orthogonal.
 - (e) Die Spaltensumme ist ein Nullvektor, die Zeilensumme ein Vektor mit lauter Einsen.
2. ([1], Ex. 4.1, 24) Sei A invertierbar: $AA^{-1} = I$. Zu welchen Zeilen von A ist dann die erste Spalte von A^{-1} orthogonal?
3. ([1], Ex. 4.1, 26) Konstruieren Sie eine Matrix A deren Spalten paarweise orthogonal sind und berechnen Sie $A^T A$.

Hausaufgabe

1. ([1], Ex. 4.1, 10) Sei A symmetrisch ($A^T = A$).
 - (a) Warum ist $C(A) \perp N(A)$?
 - (b) Seien $Ax = 0$ und $Az = 5z$. In welchen Unterräumen liegen x und z ?
2. ([1], Ex. 4.1, 14) Zwei Ebenen in \mathbf{R}^3 können nicht orthogonal sein. Finden Sie einen Vektor $v \neq 0$, der sowohl in $C(A)$ als auch in $C(B)$ liegt, wobei $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ und $B = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ ist.
Tip Betrachte die Matrix $[A \ B]$ und deren Nullraum.
3. ([1], Ex. 4.1, 28) Warum ist jede der folgenden Aussagen falsch?
 - (a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \perp \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, daher sind die Ebenen $x + y + z = 0$ und $x + y - 2z = 0$ orthogonale Unterräume.
 - (b) Der Unterraum U , der von $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ aufgespannt wird, ist das orthogonale Komplement des Unterraums V , der von $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}$ aufgespannt wird (d.h. U ist die Menge der Vektoren, die zu allen Vektoren aus V orthogonal sind, kurz: $U = V^\perp$).
 - (c) Wenn zwei Unterräume nur den Nullvektor gemeinsam haben, sind sie orthogonal.

Literatur

- [1] G. Strang. *Introduction to Linear Algebra*. Wellesley-Cambridge Press, third edition, 2003.