Saalübung

1. ([1], Ex. 3.6, 2) Finde Basen für die vier Unterräume von
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix}.$$

2. ([1], Ex. 3.6, 4) Konstruiere A mit der verlangten Eigenschaft oder erkläre, warum dies nicht möglich ist:
   (a) Der Spaltenraum enthält $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$, der Zeilenraum enthält $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 5 \end{smallmatrix}\right]$.
   (b) Der Spaltenraum hat Basis $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right]$, der Nullraum hat Basis $\left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$.
   (c) Dimension des Nullraums $= 1+$ Dimension des linken Nullraums.
   (d) Der linke Nullraum enthält $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right]$, der Zeilenraum enthält $\left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$.
   (e) Zeilenraum $=$ Spaltenraum, Nullraum $\neq$ linker Nullraum.

Hausaufgabe

1. ([1], Ex. 3.6, 3) Finde Basen für die vier Unterräume von
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. ([1], Ex. 3.6, 6) Finde **ohne Elimination** Basen für die vier Unterräume von
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

3. ([1], Ex. 3.6, 9) Welche der vier Unterräume stimmen überein für folgende Matrix-Paare:
   (a) $\left[\, A \,\right]$ und $\left[\begin{smallmatrix} A \\ A \end{smallmatrix}\right]$
   (b) $\left[\begin{smallmatrix} A \\ A \end{smallmatrix}\right]$ und $\left[\begin{smallmatrix} A & A \\ A & A \end{smallmatrix}\right]$.

4. ([1], Ex. 3.6, 15)
   (a) Welche der vier Unterräume bleiben gleich, wenn man die ersten beiden Zeilen einer Matrix A tauscht?
   (b) Angenommen, $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{smallmatrix}\right]$ liegt im Spaltenraum von A. Welcher Vektor liegt dann sicher im Spaltenraum der neuen Matrix?

Literatur

[1] G. Strang. *Introduction to Linear Algebra.* Wellesley-Cambridge Press, third edition, 2003.