Saalübung

1. ([1], Ex. 3.5, 2) Finde die größtmögliche Zahl linear unabhängiger Vektoren aus

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, v_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

2. ([1], Ex. 3.5, 6) Auf wieviele Weisen kann man drei linear unabhängige Spalten von U bzw. A auswählen?

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \\ 4 & 6 & 8 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. ([1], Ex. 3.5, 11) Welche Dimension hat der Unterraum des $\mathbf{R}^3$, der von folgenden Vektoren aufgespannt wird:

   (a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$,

   (b) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,

   (c) die Spalten einer 3×5-Matrix in Zeilenstufenform mit zwei Pivotelementen,

   (d) alle Vektoren mit positiven Komponenten.

Hausaufgabe

1. ([1], Ex. 3.5, 10)

   (a) Finde zwei linear unabhängige Vektoren der Ebene $x + 2y - 3z - t = 0$ im $\mathbf{R}^4$.

   (b) Finde drei linear unabhängige Vektoren derselben Ebene.

   (c) Warum findet man keine vier linear unabhängigen Vektoren derselben Ebene?

2. ([1], Ex. 3.5, 17) Finde für jeden der folgenden Unterräume eine Basis:

   (a) alle Vektoren des $\mathbf{R}^4$ mit gleichen Komponenten,

   (b) alle Vektoren des $\mathbf{R}^4$, deren Komponentensumme null ist,

   (c) der Spaltenraums von $U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,

   (d) der Nullraum von $U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

3. ([1], Ex. 3.5, 24) Seien

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Finde jeweils eine Basis für

   (a) $C(A)$,

   (b) $C(U)$,

   (c) den Zeilenraum von A (d.h. von $C(A^T)$),

   (d) den Zeilenraum von U,

   (e) $N(A)$,

   (f) $N(U)$.

Literatur

[1] G. Strang. *Introduction to Linear Algebra.* Wellesley-Cambridge Press, third edition, 2003.