Saalübung

1. ([1], Ex. 3.4, 1) Sei $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 4 \\ 2 & 5 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ und $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$.
   (a) Forme $\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix}$ zu $\begin{bmatrix} U & c \end{bmatrix}$ um.
   (b) Lese die Lösbarkeitsbedingung für $Ax = b$ ab.
   (c) Beschreibe den Spaltenraum von A auf zwei verschiedene Weisen, einmal mit Hilfe der Pivot-Spalten, einmal mit Hilfe der Lösbarkeitsbedingung.
   (d) Forme $\begin{bmatrix} U & c \end{bmatrix}$ zu $\begin{bmatrix} R & d \end{bmatrix}$ um.
   (e) Finde die allgemeine Lösung x_n für $Ax = 0$.
   (f) Finde eine spezielle Lösung x_p für $Ax = b$.

Hausaufgabe

1. ([1], Ex. 3.4, 4) Finde die allgemeine Lösung für $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

2. ([1], Ex. 3.4, 5) Unter welchen Bedingungen an b_1, b_2, b_3 ist das System

$$\begin{aligned} x + 2y - 2z &= b_1 \\ 2x + 5y - 4z &= b_2 \\ 4x + 9y - 8z &= b_3 \end{aligned}$$

   lösbar?

   Finde alle Lösungen für den Fall, dass die Lösbarkeitsbedingung erfüllt ist.

3. ([1], Ex. 3.4, 10) Konstruiere ein 2×3-System $Ax = b$ mit partikulärer Lösung $x_p = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ und homogener Lösung $t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

4. ([1], Ex. 3.4, 12) $Ax = b$ habe Lösungen $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.
   Finde eine weitere Lösung von $Ax = b$.

Literatur

[1] G. Strang. *Introduction to Linear Algebra.* Wellesley-Cambridge Press, third edition, 2003.