Saalübung

1. ([1], Ex. 3.1, 10) Welche der folgenden Teilmengen des $\mathbf{R}^3$ sind Unterräume?
   (a) Alle Vektoren $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ mit $x_1 = x_2$.
   (b) Alle Vektoren $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ mit $x_1 = 1$.
   (c) Alle Vektoren $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ mit $x_1 x_2 x_3 = 0$.
   (d) Alle Linearkombinationen von $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.
   (e) Alle Vektoren $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ mit $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.
   (f) Alle Vektoren $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ mit $x_1 \leq x_2 \leq x_3$.

2. ([1], Ex. 3.1, 15)
   (a) In $\mathbf{R}^3$: Die Schnittmenge zweier Ebenen durch den Nullpukt ist meistens eine ...., sie kann aber auch eine .... sein, jedoch nie der Unterraum ....
   (b) In $\mathbf{R}^3$: Die Schnittmenge einer Ebene und einer Gerade, die beide durch den Nullpunkt gehen, ist meistens ...., sie kann aber auch .... sein.
   (c) In $\mathbf{R}^5$: Seien S und T Unterräume. Zeigen Sie, dass $S \cap T$ ein Unterraum ist.

3. ([1], Ex. 3.1, 19) Beschreiben Sie die Spaltenräume von $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Hausaufgabe

1. ([1], Ex. 3.1, 20) Für welche rechte Seiten (finden Sie eine Bedingung für b_1, b_2, b_3) sind folgende Gleichungen lösbar?
   (a) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 4 \\ -1 & -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$.
   (b) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$.

2. ([1], Ex. 3.1, 23) Wenn wir eine Matrix A um einen Spaltenvektor b zu $[A\ b]$ erweitern, dann vergrößert sich der Spaltenraum $C(A)$, außer ....

   Geben Sie ein Beispiel an, bei dem der Spaltenraum größer wird, und ein anderes Beispiel, bei dem er nicht größer wird.

   Warum ist $Ax = b$ genau in den Fällen lösbar, in denen der Spaltenraum nicht größer wird?

3. ([1], Ex. 3.1, 26) Wenn A eine invertierbare Matrix ist, dann ist $C(A) =$ .... Warum?

4. ([1], Ex. 3.1, 27) Wahr oder falsch (mit Gegenbeispiel!)?
   (a) Die Vektoren b, die nicht im Spaltenraum $C(A)$ liegen, bilden einen Unterraum.
   (b) Wenn $C(A)$ nur aus dem Nullvektor besteht, ist A die Nullmatrix.
   (c) $C(2A) = C(A)$.
   (d) $C(A - I) = C(A)$.

Literatur

[1] G. Strang. *Introduction to Linear Algebra*. Wellesley-Cambridge Press, third edition, 2003.